

Tema 4

Entrelazamiento Cuántico

Alfonso V. Ramallo

Hasta ahora nos hemos limitado a estudiar sistemas constituidos por una partícula. En este tema consideraremos sistemas de dos (o más) partículas y descubriremos que tienen ciertos estados llamados **entrelazados**, en los cuales las dos partículas forman una entidad única aunque estén a gran distancia la una de la otra, de forma que sus correlaciones no pueden ser descritas por un modelo clásico probabilístico.

1 Producto tensorial

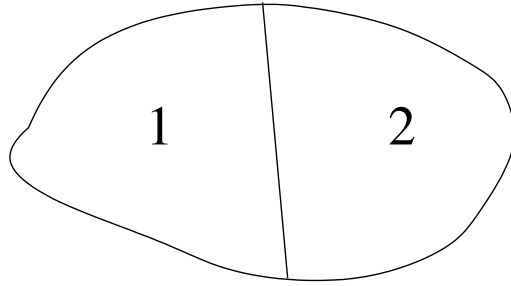


Figure 1: Un sistema que está constituido por dos subsistemas 1 y 2.

Supongamos que tenemos un sistema constituido por dos subsistemas completamente independientes, denotados por 1 y 2. Sean:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1^N &\rightarrow \text{espacio de Hilbert de dimensión } N \text{ del subsistema 1} \\ \mathcal{H}_2^M &\rightarrow \text{espacio de Hilbert de dimensión } M \text{ del subsistema 2}\end{aligned}$$

Dado que los dos subsistemas son independientes, el estado del sistema total estará dado por dos vectores de estado (uno por cada espacio de Hilbert \mathcal{H}_1^N y \mathcal{H}_2^M):

$$|\varphi\rangle \in \mathcal{H}_1^N, \quad |\chi\rangle \in \mathcal{H}_2^M. \quad (1.1)$$

Consideraremos el par $(|\varphi\rangle, |\chi\rangle)$ como un vector en un espacio de dimensión NM que se denomina el producto tensorial de \mathcal{H}_1^N y \mathcal{H}_2^M . Para definir este nuevo espacio, consideremos las bases ortonormales de \mathcal{H}_1^N y \mathcal{H}_2^M :

$$\begin{aligned}\{|n\rangle\} &\rightarrow \text{base de } \mathcal{H}_1^N, \quad (n = 1, \dots, N), \\ \{|m\rangle\} &\rightarrow \text{base de } \mathcal{H}_2^M, \quad (m = 1, \dots, M).\end{aligned} \quad (1.2)$$

Definicion

Definimos el **producto tensorial** de espacios $\mathcal{H}_1^N \otimes \mathcal{H}_2^M$ como el espacio de dimension NM generado por los pares $(|n\rangle, |m\rangle)$. Denotaremos:

$$(|n\rangle, |m\rangle) = |n \otimes m\rangle . \quad (1.3)$$

Diremos que $|n \otimes m\rangle$ es el producto tensorial de los vectores $|n\rangle$ y $|m\rangle$. Cualquier elemento de $\mathcal{H}_1^N \otimes \mathcal{H}_2^M$ se puede escribir como combinacion lineal de los vectores (1.3). El producto escalar en $\mathcal{H}_1^N \otimes \mathcal{H}_2^M$ se define a partir de los productos de los elementos de la base como:

$$\langle n' \otimes m' | n \otimes m \rangle = \delta_{n'n} \delta_{m'm} . \quad (1.4)$$

Evidentemente la base $\{|n \otimes m\rangle\}$ es ortonormal con respecto a este producto. Ademias, dados dos vectores arbitrarios $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}_1^N$ y $|\chi\rangle \in \mathcal{H}_2^M$, denotaremos por $|\varphi \otimes \chi\rangle$ al par $(|\varphi\rangle, |\chi\rangle)$, que es un elemento de $\mathcal{H}_1^N \otimes \mathcal{H}_2^M$ que representa el estado del sistema completo en el cual el subsistema 1 esta en el estado $|\varphi\rangle$ y el subsistema 2 esta en el estado $|\chi\rangle$. Diremos que $|\varphi \otimes \chi\rangle$ es el producto tensorial de los estados $|\varphi\rangle$ y $|\chi\rangle$. Supongamos que:

$$|\varphi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \in \mathcal{H}_1^N , \quad |\chi\rangle = \sum_m d_m |m\rangle \in \mathcal{H}_2^M . \quad (1.5)$$

Entonces, en terminos de la base (1.3), el estado $|\varphi \otimes \chi\rangle$ es un elemento de $\mathcal{H}_1^N \otimes \mathcal{H}_2^M$ que se puede expresar como:

$$|\varphi \otimes \chi\rangle = \sum_{m,n} c_n d_m |n \otimes m\rangle . \quad (1.6)$$

Es facil ver que el producto tensorial de estados asi definido satisface la propiedad de linealidad:

$$\begin{aligned} |\varphi \otimes (\chi_1 + \lambda \chi_2)\rangle &= |\varphi \otimes \chi_1\rangle + \lambda |\varphi \otimes \chi_2\rangle , \\ |(\varphi_1 + \lambda \varphi_2) \otimes \chi\rangle &= |\varphi_1 \otimes \chi\rangle + \lambda |\varphi_2 \otimes \chi\rangle , \end{aligned} \quad (1.7)$$

donde $|\varphi\rangle, |\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle \in \mathcal{H}_1^N$, $|\chi\rangle, |\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle \in \mathcal{H}_2^M$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Consideremos ahora el caso en el que los dos subsistemas no son independientes. En este caso supondremos que las interacciones no pueden cambiar el espacio de estados y postularemos

Postulado V

El espacio de estados de dos sistemas en interaccion es $\mathcal{H}_1^N \otimes \mathcal{H}_2^M$

Un vector general en $\mathcal{H}_1^N \otimes \mathcal{H}_2^M$ es de la forma:

$$|\phi\rangle = \sum_{n,m} b_{nm} |n \otimes m\rangle \quad (1.8)$$

En general $|\phi\rangle$ no podra escribirse como un producto tensorial $|\varphi\otimes\chi\rangle$ de dos vectores. Para ello se necesita que los coeficientes b_{nm} se puedan factorizar como $b_{nm} = c_n d_m$, tal como se sigue si se comparan (1.8) y (1.6). Observemos que los vectores de estado que se pueden escribir como productos tensoriales son un subconjunto (pero no un subespacio vectorial) de $\mathcal{H}_1^N \otimes \mathcal{H}_2^M$. Ello es debido a que la combinacion lineal de dos estados que factorizan, en general, no se puede factorizar.

Definicion

Un vector de estado que no pueda ser escrito en forma de un producto tensorial se llama **estado entrelazado**

Definamos ahora el **producto tensorial de dos operadores**. Sean

$$A \rightarrow \text{operador lineal actuando en } \mathcal{H}_1 ,$$

$$B \rightarrow \text{operador lineal actuando en } \mathcal{H}_2 . \quad (1.9)$$

Vamos a definir el operador $A \otimes B$, que actua en $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Para ello basta con especificar sobre un producto tensorial de estados:

$$A \otimes B |\varphi \otimes \chi\rangle = |A\varphi \otimes B\chi\rangle \quad (1.10)$$

A partir de esta definicion podemos escribir como actua $A \otimes B$ sobre un estado arbitrario. En efecto, sea $|\phi\rangle$ el estado escrito en (1.8). Entonces, debido al caracter lineal de $A \otimes B$, se tiene

$$A \otimes B |\phi\rangle = \sum_{n,m} b_{nm} |An \otimes Bm\rangle . \quad (1.11)$$

Los elementos de matriz de $A \otimes B$ seran:

$$\langle n' \otimes m' | A \otimes B |n \otimes m\rangle = A_{n'n} B_{m'm} , \quad (1.12)$$

siendo $A_{n'n}$ y $B_{m'm}$ los elementos de matriz de los operadores A y B . En general un operador C definido sobre $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ no sera de la forma $A \otimes B$. Sus elementos de matriz seran:

$$\langle n' \otimes m' | C |n \otimes m\rangle = C_{n'm';nm} . \quad (1.13)$$

Solo en algunos casos sera posible escribir $C_{n'm';nm}$ en la forma factorizada $A_{n'n} B_{m'm}$.

En particular, los productos tensoriales $A \otimes I_2$ y $I_1 \otimes B$, siendo $I_{1,2}$ los operadores identidad en $\mathcal{H}_{1,2}$, tienen los elementos de matriz:

$$\langle n' \otimes m' | A \otimes I_2 |n \otimes m\rangle = A_{n'n} \delta_{m',m} ,$$

$$\langle n' \otimes m' | I_1 \otimes B |n \otimes m\rangle = \delta_{n',n} B_{m',m} . \quad (1.14)$$

Notacion

Muchas veces omitiremos el simbolo del producto tensorial en $|\varphi \otimes \chi\rangle$ y escribiremos simplemente $|\varphi \chi\rangle$.

2 Sistema de dos particulas de espin 1/2

Consideremos el espacio de estados de un sistema de dos particulas de espin 1/2. En este caso \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 son bidimensionales y $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ tiene dimension $2 \times 2 = 4$. Tomemos como base de \mathcal{H}_1 los autovectores de S_{1z} , denotados por $|\epsilon_1\rangle$, con $\epsilon_1 = \pm 1$:

$$S_{1z} |\epsilon_1\rangle = \frac{\hbar}{2} \epsilon_1 |\epsilon_1\rangle . \quad (2.1)$$

De forma similar para \mathcal{H}_2 :

$$S_{2z} |\epsilon_2\rangle = \frac{\hbar}{2} \epsilon_2 |\epsilon_2\rangle , \quad \epsilon_2 = \pm 1 . \quad (2.2)$$

La base de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ sera $|\epsilon_1 \otimes \epsilon_2\rangle$, que simplemente denotaremos por $|\epsilon_1 \epsilon_2\rangle$. Los productos tensoriales de operadores actuan como en el caso general. Asi, por ejemplo, si denotamos $S_{1z} \otimes I_2 = S_{1z}$ y $S_{1z} \otimes S_{2z} = S_{1z} S_{2z}$, tenemos:

$$S_{1z} |\epsilon_1 \epsilon_2\rangle = \frac{\hbar}{2} \epsilon_1 |\epsilon_1 \epsilon_2\rangle , \quad S_{1z} S_{2z} |\epsilon_1 \epsilon_2\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \epsilon_1 \epsilon_2 |\epsilon_1 \epsilon_2\rangle . \quad (2.3)$$

Consideremos dos vectores normalizados en \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 :

$$\begin{aligned} |\chi_1\rangle &= \lambda_1 |+\rangle_1 + \mu_1 |-\rangle_1 , & |\lambda_1|^2 + |\mu_1|^2 &= 1 , \\ |\chi_2\rangle &= \lambda_2 |+\rangle_2 + \mu_2 |-\rangle_2 , & |\lambda_2|^2 + |\mu_2|^2 &= 1 , \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde hemos escrito $|\pm\rangle_{1,2}$ en lugar de $|\pm 1\rangle_{1,2}$ y los subindices 1 y 2 nos indican a cual de los dos espacios de Hilbert (\mathcal{H}_1 o \mathcal{H}_2) pertenecen los vectores. Calculemos el producto tensorial $|\chi_1 \otimes \chi_2\rangle$:

$$|\chi_1 \otimes \chi_2\rangle = \lambda_1 \lambda_2 |++\rangle + \lambda_1 \mu_2 |+-\rangle + \mu_1 \lambda_2 |-+\rangle + \mu_1 \mu_2 |--\rangle . \quad (2.5)$$

Si $|\psi\rangle$ es un estado arbitrario de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, se puede representar como combinacion lineal de los estados $|\epsilon_1 \epsilon_2\rangle$ en la forma:

$$|\psi\rangle = C_{++} |++\rangle + C_{+-} |+-\rangle + C_{-+} |-+\rangle + C_{--} |--\rangle . \quad (2.6)$$

Si $|\psi\rangle$ es de la forma $|\chi_1 \otimes \chi_2\rangle$, para algun par de estados $|\chi_1\rangle$ y $|\chi_2\rangle$, sera posible escribir los coeficientes en (2.6) como en (2.5), es decir en la forma:

$$C_{++} = \lambda_1 \lambda_2 , \quad C_{+-} = \lambda_1 \mu_2 , \quad C_{-+} = \mu_1 \lambda_2 , \quad C_{--} = \mu_1 \mu_2 . \quad (2.7)$$

Los coeficientes (2.7) satisfacen la relacion:

$$C_{++} C_{--} = C_{+-} C_{-+} , \quad (2.8)$$

que sirve para determinar si un vector de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ esta o no entrelazado, pues si (2.8) no se satisface el vector $|\psi\rangle$ debe necesariamente corresponder a un estado entrelazado.

Ejemplo

Consideremos el denominado **estado de Bell**:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle) \quad (2.9)$$

para el cual $C_{++} = C_{--} = 0$, $C_{+-} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $C_{-+} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Claramente no se verifica la condicion (2.8) y, por tanto, se trata de un estado entrelazado.

Observacion

El estado $|\phi\rangle$ escrito en (2.9) es invariante bajo rotaciones. En efecto bajo una rotacion R , los vectores $|+\rangle$ y $|-\rangle$ se transforman como:

$$|+\rangle_R = a|+\rangle + b|-\rangle, \quad |-\rangle_R = c|+\rangle + d|-\rangle \quad (2.10)$$

donde los coeficientes a , b , c y d satisfacen $ad - bc = 1$, pues son los elementos de matriz de una matriz del grupo $SU(2)$. Entonces, los estados $|+-\rangle$ y $|-+\rangle$ rotados son:

$$\begin{aligned} |+-\rangle_R &= ac|++\rangle + ad|+-\rangle + bc|-+\rangle + bd|--\rangle, \\ |-+\rangle_R &= ca|++\rangle + cb|+-\rangle + da|-+\rangle + db|--\rangle, \end{aligned} \quad (2.11)$$

y, en consecuencia, el estado de Bell rotado es:

$$|\phi\rangle_R = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle_R - |-+\rangle_R) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(ad - bc)|+-\rangle + (bc - da)|-+\rangle] = |\phi\rangle, \quad (2.12)$$

tal como queriamos demostrar.

3 Matriz densidad

Sea $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ un estado en un sistema de dos particulas. Entonces, caben dos posibilidades

- Si $|\psi\rangle = |\varphi_1 \otimes \varphi_2\rangle$ podemos decir que el estado de la particula 1 es $|\varphi_1\rangle$.
- Si $|\psi\rangle$ es un estado entrelazado veremos mas adelante que no le podremos atribuir a la particula 1 un vector de estado.

Por lo tanto, debido a esta segunda posibilidad, debemos de generalizar nuestra descripcion de los sistemas cuanticos.

- Cuando un sistema cuantico pueda ser descrito como un vector en el espacio de Hilbert de estados diremos que tenemos un **estado puro**. En esta situacion tendremos una informacion completa sobre el sistema.
- Cuando la informacion sobre el sistema sea incompleta diremos que tenemos una **mezcla** o un **estado mixto**. En este caso el sistema se describira por medio de un operador llamado **matriz densidad** (tambien llamado **operador densidad** o, a veces, **operador de estado**).

Sea $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ un vector de estado. El proyector asociado a este estado es el operador $\mathcal{P}_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$. Observemos que \mathcal{P}_φ es una mejor descripcion matematica del estado porque la fase arbitraria de $|\varphi\rangle$ desaparece de \mathcal{P}_φ , dado que este es invariante si $|\varphi\rangle$ se multiplica por un factor de fase ($|\varphi\rangle \rightarrow e^{i\alpha}|\varphi\rangle$, con $\alpha \in \mathbb{R}$). Ademas, el valor esperado de un observable A en el estado $|\varphi\rangle$ es:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_\varphi &= \langle \varphi | A | \varphi \rangle = \sum_m \langle \varphi | A | m \rangle \langle m | \varphi \rangle = \sum_m \langle m | \varphi \rangle \langle \varphi | A | m \rangle = \\ &= \sum_m \langle m | \mathcal{P}_\varphi A | m \rangle = \text{Tr}(\mathcal{P}_\varphi A) . \end{aligned} \quad (3.1)$$

Diremos que \mathcal{P}_φ es la **matriz densidad del estado puro** $|\varphi\rangle$. Vamos a generalizar esta definicion para una mezcla.

Definicion

Supongamos que sabemos que un sistema cuantico puede estar en los estados $|\psi_n\rangle$ ($n = 1, 2, \dots$) con probabilidades p_n ($0 \leq p_n \leq 1$, $\sum_n p_n = 1$). Los estados $|\psi_n\rangle$ se suponen normalizados, pero no necesariamente ortogonales entre si. Este conjunto $\{p_n, |\psi_n\rangle\}$ se denomina un **colectivo** (ensemble) de estados puros y sirve para caracterizar una mezcla. El **operador densidad** ρ de este colectivo se define como:

$$\boxed{\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| = \sum_n p_n \mathcal{P}_{\psi_n}} \quad (3.2)$$

Se dice que la suma de estados anterior es una superposicion **incoherente**, en oposicion a la superposicion **coherente** que aparece cuando un estado se expresa como combinacion lineal de los vectores de una base. La incoherencia viene del hecho que la suma (3.2) no depende de las fases relativas de los estados $|\psi_n\rangle$. La matriz densidad ρ es un operador que codifica la informacion que tenemos sobre el sistema. Veamos como podemos extraer dicha informacion.

El valor medio de un observable A en el estado $|\psi_n\rangle$ es $\langle A \rangle_n = \langle \psi_n | A | \psi_n \rangle$. Por lo tanto, el valor esperado de A en la mezcla es:

$$\langle A \rangle = \sum_n p_n \langle A \rangle_n = \sum_n p_n \langle \psi_n | A | \psi_n \rangle . \quad (3.3)$$

Como, segun (3.1) se tiene:

$$\langle A \rangle_n = \langle \psi_n | A | \psi_n \rangle = \text{Tr}(\mathcal{P}_{\psi_n} A) , \quad (3.4)$$

podemos escribir:

$$\langle A \rangle = \sum_n p_n \text{Tr}(\mathcal{P}_{\psi_n} A) = \text{Tr}\left(\sum_n p_n \mathcal{P}_{\psi_n} A\right) , \quad (3.5)$$

es decir, el valor esperado de un observable A en una mezcla descrita por una matriz densidad ρ es:

$$\boxed{\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A)} \quad (3.6)$$

Sea $|a_i\rangle$ el autovector del observable A correspondiente al autovalor a_i ($A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$). La probabilidad de obtener a_i como resultado de la medida de A en el estado $|\psi_n\rangle$ es:

$$|\langle a_i | \psi_n \rangle|^2 = \langle a_i | \psi_n \rangle \langle \psi_n | a_i \rangle . \quad (3.7)$$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener a_i al medir A en el estado caracterizado por la matriz densidad ρ es:

$$P(a_i) = \sum_n p_n |\langle a_i | \psi_n \rangle|^2 = \sum_n p_n \langle a_i | \psi_n \rangle \langle \psi_n | a_i \rangle = \langle a_i | \left[\sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \right] | a_i \rangle . \quad (3.8)$$

Es decir:

$$\boxed{P(a_i) = \langle a_i | \rho | a_i \rangle} \quad (3.9)$$

Como comprobacion de esta ecuacion calculemos el valor medio de A usando la expresion de $P(a_i)$ escrita en (3.9):

$$\langle A \rangle = \sum_i a_i P(a_i) = \sum_i a_i \langle a_i | \rho | a_i \rangle = \sum_i \langle a_i | \rho A | a_i \rangle = \text{Tr}(\rho A) , \quad (3.10)$$

que es el mismo resultado que en (3.6).

Estudiemos ahora las propiedades de la matriz densidad ρ

- ρ es **hermitica**, es decir

$$\boxed{\rho^\dagger = \rho} \quad (3.11)$$

Esta propiedad es inmediata de la definicion (3.2).

- ρ **tiene traza uno**:

$$\boxed{\text{Tr} \rho = 1} \quad (3.12)$$

En efecto, si $\{|i\rangle\}$ es una base ortonormal:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \rho &= \sum_i \langle i | \left[\sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \right] | i \rangle = \sum_{n,i} p_n \langle i | \psi_n \rangle \langle \psi_n | i \rangle = \\ &= \sum_n p_n \left[\sum_i \langle \psi_n | i \rangle \langle i | \psi_n \rangle \right] = \sum_n p_n \langle \psi_n | \psi_n \rangle = \sum_n p_n = 1 . \end{aligned} \quad (3.13)$$

- ρ es no negativo:

$$\boxed{\forall |v\rangle \in \mathcal{H} \implies \langle v|\rho|v\rangle \geq 0} \quad (3.14)$$

La demostracion de esta propiedad es como sigue:

$$\langle v|\rho|v\rangle = \sum_n \langle v|\psi_n\rangle \langle \psi_n|v\rangle p_n = \sum_n p_n |\langle v|\psi_n\rangle|^2 \geq 0 . \quad (3.15)$$

Observemos que, como consecuencia de esta ultima propiedad, los autovalores de ρ son no negativos y, por tanto:

$$\boxed{\det \rho \geq 0} \quad (3.16)$$

Inversamente, **un operador ρ hermitico, no negativo y de traza unidad es un operador densidad**. Efectivamente, si se satisfacen estas tres condiciones la descomposicion espectral de ρ permite escribir (de manera no unica):

$$\rho = \sum_n p_n |n\rangle \langle n| , \quad (3.17)$$

que corresponde a una mezcla de estados $\{|n\rangle\}$ con probabilidad p_n .

Una propiedad importante es la siguiente:

Un estado caracterizado por una matriz densidad ρ es puro si y solo si $\rho^2 = \rho$

Demostracion

Para un estado puro $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$ para algun vector $|\psi\rangle$, que supondremos normalizado. Por tanto:

$$\rho^2 = |\psi\rangle \langle \psi| \psi\rangle \langle \psi| = |\psi\rangle \langle \psi| = \rho . \quad (3.18)$$

Reciprocamente, si $\rho = \rho^\dagger$ y $\rho^2 = \rho$, entonces el operador ρ es un proyector. Como $\text{Tr} \rho = 1$, la matriz densidad es un proyector sobre un espacio unidimensional. En consecuencia ρ es de la forma $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$ y, por consiguiente, el estado es puro.

Teorema

$$\boxed{\text{Tr} \rho^2 \leq 1} \quad (3.19)$$

Demostracion

Calculemos $\text{Tr} \rho^2$ en una base ortonormal:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \rho^2 &= \sum_i \sum_{n,m} p_n p_m \langle i|\psi_n\rangle \langle \psi_n|\psi_m\rangle \langle \psi_m|i\rangle = \sum_{n,m} p_n p_m \langle \psi_n|\psi_m\rangle \sum_i \langle \psi_m|i\rangle \langle i|\psi_n\rangle = \\ &= \sum_{n,m} p_n p_m |\langle \psi_m|\psi_n\rangle|^2 . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Pero $|\psi_n\rangle$ y $|\psi_m\rangle$ son estados normalizados, lo cual implica que $|\langle\psi_m|\psi_n\rangle|^2$ es una probabilidad de transición y entonces, necesariamente, $|\langle\psi_m|\psi_n\rangle|^2 \leq 1$. Por tanto:

$$\text{Tr } \rho^2 \leq \sum_{n,m} p_n p_m = \left(\sum_n p_n \right)^2 = 1, \quad (3.21)$$

tal como queríamos demostrar.

Observemos que $\text{Tr } \rho^2 = 1$ si el estado es puro, pues en este caso $\text{Tr } \rho^2 = \text{Tr } \rho = 1$. En general, definimos

$$\boxed{\text{Tr } \rho^2 \equiv \text{pureza del estado}} \quad (3.22)$$

En particular tenemos

- Si $\text{Tr } \rho^2 = 1$, entonces el estado es puro y tenemos sobre el la máxima información.
- Si $\text{Tr } \rho^2 = \frac{1}{N}$ en un espacio de Hilbert N -dimensional tenemos un estado completamente mezclado. Este valor de $\text{Tr } \rho^2$ ocurre cuando todos los estados del espacio de Hilbert contribuyen a ρ con la misma probabilidad y ρ es de la forma:

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_n |n\rangle\langle n|. \quad (3.23)$$

4 Matriz densidad de un sistema de dos niveles

Consideremos un sistema de dos niveles, que denotaremos por $|+\rangle$ y $|-\rangle$. La matriz densidad será, por tanto, una matriz 2×2 . Toda matriz densidad debe de ser hermitica y de traza unidad. Una matriz 2×2 con estas características puede escribirse como:

$$\rho = \begin{pmatrix} a & c \\ c^* & 1-a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}. \quad (4.1)$$

Además, para que ρ sea una matriz densidad debemos de imponer que sea positiva, o lo que es lo mismo, que sus dos autovalores (λ_+, λ_-) (correspondientes a sus dos autovectores) sean no negativos ($\lambda_+ \geq 0, \lambda_- \geq 0$). La traza y el determinante de ρ son:

$$\text{Tr } \rho = \lambda_+ + \lambda_- = 1, \quad \det \rho = \lambda_+ \lambda_- = a(1-a) - |c|^2. \quad (4.2)$$

De la primera de estas ecuaciones deducimos que $\lambda_- = 1 - \lambda_+$. Substituyendo este resultado en la fórmula del determinante de ρ , obtenemos:

$$\det \rho = \lambda_+(1 - \lambda_+) = \lambda_+ - \lambda_+^2. \quad (4.3)$$

El maximo del determinante de ρ se alcanza cuando:

$$\frac{d}{d\lambda_+} \det \rho = 1 - 2\lambda_+ = 0, \quad (4.4)$$

o, equivalentemente:

$$\lambda_+ = \frac{1}{2}, \quad \lambda_- = \frac{1}{2}. \quad (4.5)$$

Por tanto

$$\det \rho|_{max} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\det \rho \leq \frac{1}{4}} \quad (4.6)$$

En terminos de la parametrizacion introducida en (4.1), esta desigualdad es:

$$\boxed{a(1-a) - |c|^2 \leq \frac{1}{4}} \quad (4.7)$$

Para un estado puro $\rho^2 = \rho$ que, tomando determinantes, implica de $(\det \rho)^2 = \det \rho$, que tiene dos soluciones $\det \rho = 0$ y $\det \rho = 1$. Esta ultima solucion esta excluida debida a la desigualdad (4.6). Asi pues, concluimos que:

$$\boxed{\text{Estado puro}} \Longrightarrow \boxed{\det \rho = 0} \Longrightarrow \boxed{a(1-a) - |c|^2 = 0} \quad (4.8)$$

Volvamos al caso general y escribamos los elementos de matriz de ρ en la forma:

$$a = \frac{1+b_z}{2}, \quad c = \frac{b_x - ib_y}{2}, \quad b_x, b_y, b_z \in \mathbb{R}. \quad (4.9)$$

Formemos el vector $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \in \mathbb{R}^3$. Entonces ρ puede escribirse como:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+b_z & b_x - ib_y \\ b_x + ib_y & 1-b_z \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

que, en terminos de las matrices de Pauli $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, puede escribirse como:

$$\boxed{\rho = \frac{1}{2}(1 + \vec{b} \cdot \vec{\sigma})} \quad (4.11)$$

El vector \vec{b} se denomina **vector de Bloch**. Este vector parametriza la matriz densidad de un sistema de dos niveles. Dado, que:

$$\det \rho = \frac{1}{4}(1 - b_z^2 - b_x^2 - b_y^2) = \frac{1}{4}(1 - \vec{b}^2), \quad (4.12)$$

la condicion (4.6) implica que:

$$\boxed{\vec{b}^2 \leq 1} \quad (4.13)$$

Por tanto, el vector \vec{b} determina un punto en la bola unidad de \mathbb{R}^3 , que se denomina la **bola de Bloch**. Asi pues, cualquier estado (puro o mezcla) de un sistema de dos niveles esta representado por un punto en la bola unidad $\vec{b}^2 \leq 1$. Distinguiremos varios casos:

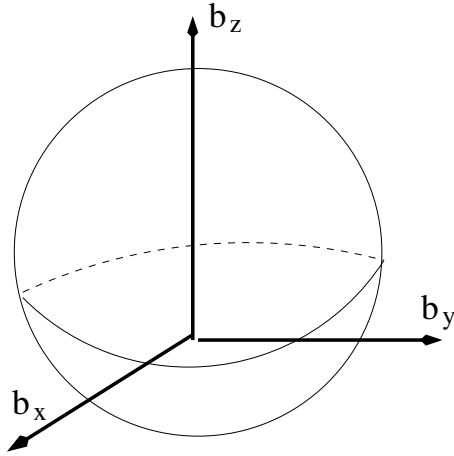


Figure 2: Representacion de la bola de Bloch.

- $\boxed{\vec{b}^2 = 1}$ En este caso \vec{b} pertenece a la **esfera de Bloch**, que es la frontera de la bola de Bloch. Además, según (4.12), $\det \rho = 0$ y tenemos un estado puro. Se dice que el estado está **completamente polarizado**.
- $\boxed{\vec{b}^2 = 0}$ Este es el centro $\vec{b} = 0$ de la bola de Bloch. En este caso $\rho = \frac{I}{2}$ y diremos que es un estado **no polarizado** o **despolarizado**.
- $\boxed{0 < \vec{b}^2 < 1}$ Tenemos un punto del interior de la bola de Bloch. Diremos que es un estado **parcialmente polarizado**.

4.1 Aplicacion a las particulas de espín 1/2

Supongamos que nuestro sistema de dos niveles sea una partícula de espín 1/2 y que los estados de la base $|+\rangle$ y $|-\rangle$ son los autovectores de S_z con autovalor $\pm\hbar/2$. Como sabemos, el operador de espín es $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ y el valor medio de \vec{S} es:

$$\langle S_i \rangle = \text{Tr}(\rho S_i) = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{2} \text{Tr}(\sigma_i + \sum_j b_j \sigma_j \sigma_i) . \quad (4.14)$$

Como $\text{Tr} \sigma_i = 0$ y $\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2 \delta_{ij}$, tenemos:

$$\langle S_i \rangle = \frac{\hbar}{4} \sum_j 2b_j \delta_{ij} = \frac{\hbar}{2} b_i . \quad (4.15)$$

En forma vectorial:

$$\boxed{\langle \vec{S} \rangle = \frac{\hbar \vec{b}}{2}} \quad (4.16)$$

Asi pues, el vector \vec{b} determina el valor medio del espin \vec{S} en el estado. Calculemos, en particular, la matriz densidad para el estado $|+, \vec{n}\rangle$, que es el autovector de $\vec{S} \cdot \vec{n}$ con autovalor $\hbar/2$. Si parametrizamos \vec{n} como:

$$\vec{n} = (\text{sen } \theta \cos \phi, \text{sen } \theta \text{sen } \phi, \cos \theta) . \quad (4.17)$$

Entonces:

$$|+, \vec{n}\rangle = e^{i\alpha_+} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \text{sen } \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} . \quad (4.18)$$

La correspondiente matriz densidad $\rho(\vec{n}) = |+, \vec{n}\rangle \langle +, \vec{n}|$ fue calculada en el tema anterior:

$$\rho(\vec{n}) = |+, \vec{n}\rangle \langle +, \vec{n}| = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \text{sen } \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \text{sen } \frac{\theta}{2} & \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} . \quad (4.19)$$

Usando:

$$\cos \frac{\theta}{2} \text{sen } \frac{\theta}{2} = \frac{\text{sen } \theta}{2} , \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} , \quad \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} , \quad (4.20)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{n}) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\cos \theta}{2} & \frac{1}{2} e^{-i\phi} \text{sen } \theta \\ \frac{1}{2} e^{i\phi} \text{sen } \theta & \frac{1}{2} - \frac{\cos \theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & (\cos \phi - i \text{sen } \phi) \text{sen } \theta \\ (\cos \phi + i \text{sen } \phi) \text{sen } \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} n_z & n_x - i n_y \\ n_x + i n_y & -n_z \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde, en el ultimo paso, hemos tenido en cuenta (4.17). Es decir:

$$\boxed{\rho(\vec{n}) = \frac{1 + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2}} \quad \vec{n} \cdot \vec{n} = 1 , \quad (4.22)$$

que corresponde a nuestra formula general con el vector de Bloch igual a la direccion del espin determinada por el vector unitario \vec{n} . Esto determina un punto en la esfera de Bloch.

4.2 Preparacion de estados

Volvamos al sistema general de dos niveles. Veamos como diferentes preparaciones nos pueden conducir a la misma matriz densidad cuando el vector de Bloch \vec{b} es tal que $|\vec{b}| < 1$, es decir para estados mezcla del interior de la bola de Bloch.

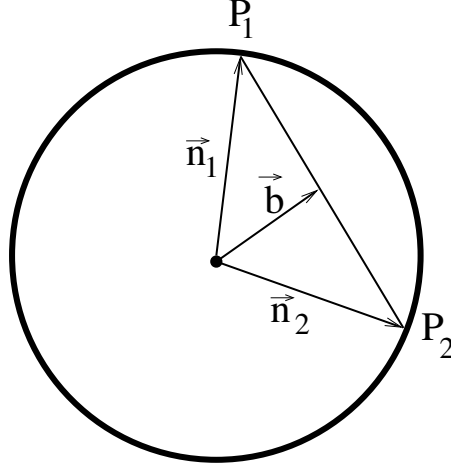


Figure 3: Para cada punto del interior de la bola de Bloch existen infinitas cuerdas de la esfera de Bolch que pasan por el. Cada cuerda determina dos puntos P_1 y P_2 y dos vectores \vec{n}_1 y \vec{n}_2 .

Tal como se muestra en la figura 3, para todo punto del interior de la esfera de Bloch ($|\vec{b}| < 1$) tracemos una cuerda que pase por el extremo de \vec{b} y que corte a la esfera de radio 1 en los puntos P_1 y P_2 . Definamos los vectores unitarios \vec{n}_1 y \vec{n}_2 como:

$$\vec{n}_1 = O\vec{P}_1, \quad \vec{n}_2 = O\vec{P}_2, \quad (4.23)$$

siendo O el centro de la bola de Bloch. El vector de Bloch \vec{b} se puede escribir como:

$$\vec{b} = \vec{n}_1 + \lambda(\vec{n}_2 - \vec{n}_1) = (1 - \lambda)\vec{n}_1 + \lambda\vec{n}_2, \quad (4.24)$$

con $0 < \lambda < 1$. Entonces, la matriz densidad correspondiente al vector \vec{b} es:

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = (1 - \lambda) \frac{1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{n}_1}{2} + \lambda \frac{1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{n}_2}{2}. \quad (4.25)$$

Dado que \vec{n}_1 y \vec{n}_2 son unitarios, describen los estados puros $|\vec{n}_1\rangle$ y $|\vec{n}_2\rangle$. Por tanto:

$$\rho = (1 - \lambda) |\vec{n}_1\rangle\langle\vec{n}_1| + \lambda |\vec{n}_2\rangle\langle\vec{n}_2|. \quad (4.26)$$

Por consiguiente, la matriz ρ describe una mezcla de $|\vec{n}_1\rangle$ y $|\vec{n}_2\rangle$ con probabilidades $1 - \lambda$ y λ . Observemos que si $|\vec{b}| < 1$ existen infinitas cuerdas que pasan por el extremo de \vec{b} , es decir existen infinitas formas de preparar el estado cuantico con matriz ρ .

5 Estados puros y mezclas

Es importante distinguir conceptualmente entre un estado puro y una mezcla. Volvamos al sistema de una partícula de espín 1/2 y consideremos el estado puro:

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle). \quad (5.1)$$

Si hacemos un experimento de Stern-Gerlach con un campo magnetico \vec{B} paralelo al eje z y la particula esta en este estado, tendremos 50 por ciento de probabilidad de observar que el espin es $+\hbar/2$ y otro 50 por ciento de obtener $-\hbar/2$. Sin embargo, si orientamos el iman en la direccion del eje x , tenemos 100 por cien de probabilidad de obtener $+\hbar/2$, pues $|\chi\rangle$ es autovector de σ_x . Verifiquemos esto ultimo. Dado que $\sigma_x |+\rangle = |-\rangle$ y $\sigma_x |-\rangle = |+\rangle$, obtenemos:

$$\sigma_x |\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-\rangle + |+\rangle) = |\chi\rangle . \quad (5.2)$$

Comparemos este resultado con el determinado por la matriz densidad:

$$\rho = \frac{1}{2} |+\rangle\langle +| + \frac{1}{2} |-\rangle\langle -| . \quad (5.3)$$

Este es el estado despolarizado con $\vec{b} = 0$. Si medimos S_z obtenemos 50% de probabilidad de obtener $+\hbar/2$ y un 50% de medir $-\hbar/2$. Sin embargo en este estado obtendremos tambien un 50% para los dos posibles valores de S_x (como $\vec{b} = 0$ se tiene que $\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} b_x = 0$). Esto se puede verificar directamente escribiendo ρ en terminos de la base de autovectores de σ_x ;

$$|+x\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) , \quad | - x \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) . \quad (5.4)$$

Puede comprobarse directamente que $\sigma_x |\pm x\rangle = \pm |\pm x\rangle$. La relacion inversa es:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+x\rangle + |-x\rangle) , \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+x\rangle - |-x\rangle) , \quad (5.5)$$

a partir de la cual podemos obtener ρ en terminos de $|\pm x\rangle$:

$$\rho = \frac{1}{4} (|+x\rangle + |-x\rangle)(\langle +x| + \langle -x|) + \frac{1}{4} (|+x\rangle - |-x\rangle)(\langle +x| - \langle -x|) , \quad (5.6)$$

o, lo que es lo mismo:

$$\rho = \frac{1}{2} |+x\rangle\langle +x| + \frac{1}{2} |-x\rangle\langle -x| . \quad (5.7)$$

A partir de esta expresion es inmediato deducir que tenemos un 50% de medir los dos posibles valores de S_x . Por el contrario, la matriz densidad del estado puro $|\chi\rangle$ es:

$$\begin{aligned} \rho_\chi &= |\chi\rangle\langle \chi| = \frac{1}{2} (|+\rangle + |-\rangle)(\langle +| + \langle -|) = \\ &= \frac{1}{2} (|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -| + |+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Esta matriz se diferencia de la del estado mezcla en los elementos de matriz no diagonales. Se dice que el estado $|\chi\rangle$ de (5.1) es una **superposicion coherente** de los estados $|+\rangle$ y $|-\rangle$. Por el contrario, la matriz densidad ρ de (5.3) describe una superposicion incoherente de los estados $|+\rangle$ y $|-\rangle$. En el paso $|\chi\rangle \rightarrow \rho$ se pierde la informacion de los elementos no diagonales de ρ . Estos elementos no diagonales son los que contienen la informacion de las fases relativas (un producto externo de vectores $|\chi\rangle\langle\psi|$ solo es invariante bajo un cambio de fase de $|\chi\rangle$ y $|\psi\rangle$ si $|\chi\rangle = |\psi\rangle$). Por esta razon los elementos no diagonales de ρ se llaman las **coherencias de la matriz densidad**.

6 Matriz densidad reducida

Consideremos un sistema de dos particulas descrito por una matriz densidad ρ definida en $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. ¿Cual es la matriz densidad de la particula 1?. Para responder a esta pregunta examinemos una propiedad fisica C que dependa solo de la particula 1, es decir que sea de la forma $C = A \otimes I_2$, con A un operador que actua sobre \mathcal{H}_1 . Queremos encontrar una matriz densidad $\rho^{(1)}$ definida en \mathcal{H}_1 tal que:

$$\langle A \rangle = \text{Tr}_1[\rho^{(1)} A] , \quad (6.1)$$

donde Tr_1 denota la traza sobre el espacio \mathcal{H}_1 . En el espacio total $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ el valor esperado de $A \otimes I_2$ es:

$$\langle A \otimes I_2 \rangle = \text{Tr}[\rho(A \otimes I_2)] = \sum_{m_1, m_2, n_1, n_2} \rho_{m_1 m_2; n_1 n_2} (A \otimes I_2)_{n_1, n_2; m_1, m_2} , \quad (6.2)$$

donde n_1, m_1 son indices de \mathcal{H}_1 y n_2, m_2 son indices de \mathcal{H}_2 . Teniendo en cuenta que:

$$(A \otimes I_2)_{n_1, n_2; m_1, m_2} = A_{n_1 m_1} \delta_{n_2 m_2} , \quad (6.3)$$

podemos escribir:

$$\langle A \otimes I_2 \rangle = \sum_{m_1, m_2, n_1, n_2} \rho_{m_1 m_2; n_1 n_2} A_{n_1 m_1} \delta_{n_2 m_2} = \sum_{n_1, m_1} A_{n_1 m_1} \sum_{n_2} \rho_{m_1 n_2; n_1 n_2} . \quad (6.4)$$

Definamos:

$$\boxed{\rho_{m_1 n_1}^{(1)} = \sum_{n_2} \rho_{m_1 n_2; n_1 n_2}} \quad (6.5)$$

o, equivalentemente:

$$\boxed{\rho^{(1)} = \text{Tr}_2 \rho} \quad (6.6)$$

siendo Tr_2 la traza parcial sobre el espacio \mathcal{H}_2 . El operador $\rho^{(1)}$ asi definido se llama **matriz densidad reducida**. Con esta definicion:

$$\langle A \otimes I_2 \rangle = \text{Tr}_1[\rho^{(1)} A] , \quad (6.7)$$

y esta claro que $\rho^{(1)} = \text{Tr}_2 \rho$ satisface el requisito para ser considerada la matriz densidad de la partícula 1. Para calcular las trazas parciales observemos que, si $\{|n\rangle\}$ es una base ortonormal:

$$\text{Tr}|a\rangle\langle b| = \sum_n \langle n|a\rangle \langle b|n\rangle = \sum_n \langle b|n\rangle \langle n|a\rangle, \quad (6.8)$$

y, teniendo en cuenta que $1 = \sum_n |n\rangle\langle n|$, llegamos a:

$$\boxed{\text{Tr}|a\rangle\langle b| = \langle b|a\rangle} \quad (6.9)$$

Supongamos que ρ es la matriz densidad correspondiente a un estado puro $|\psi\rangle$ en el espacio producto $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Representemos $|\psi\rangle$ como:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |\varphi_i \otimes \chi_i\rangle. \quad (6.10)$$

Entonces $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ y la matriz densidad reducida es:

$$\rho^{(1)} = \sum_{i,j} c_i c_j^* \langle \chi_j | \chi_i \rangle |\varphi_i\rangle\langle\varphi_j|. \quad (6.11)$$

En particular, si los $|\chi_i\rangle$ son ortogonales ($\langle \chi_j | \chi_i \rangle = \delta_{i,j}$), tenemos:

$$\rho^{(1)} = \sum_i |c_i|^2 |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|. \quad (6.12)$$

Estudiemos varios ejemplos

- Consideremos un estado puro $|\psi\rangle = |\varphi \otimes \chi\rangle$ no entrelazado. Entonces $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = |\varphi \otimes \chi\rangle\langle\varphi \otimes \chi|$ y, haciendo la traza parcial sobre \mathcal{H}_2 , obtenemos:

$$\rho^{(1)} = \langle \chi | \chi \rangle |\varphi\rangle\langle\varphi| = |\varphi\rangle\langle\varphi|. \quad (6.13)$$

Entonces $\rho^{(1)}$ corresponde al estado puro $|\varphi\rangle$ en \mathcal{H}_1 .

- Consideremos un estado de dos partículas entrelazadas en el estado de Bell:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+- \rangle - |-+ \rangle). \quad (6.14)$$

Entonces $\rho = |\phi\rangle\langle\phi|$ está dado por:

$$\rho = \frac{1}{2}(|+- \rangle\langle +- | + |-+ \rangle\langle -+ | - |-+ \rangle\langle -+ | - |-+ \rangle\langle -+ | - |-+ \rangle\langle -+ |). \quad (6.15)$$

Como

$$\begin{aligned}\text{Tr}_2 \left[|+-\rangle \langle +-| \right] &= |+\rangle \langle +| , \\ \text{Tr}_2 \left[|-+\rangle \langle -+| \right] &= |-\rangle \langle -| , \\ \text{Tr}_2 \left[|+-\rangle \langle -+| \right] &= \text{Tr}_2 \left[|-+\rangle \langle +-| \right] = 0\end{aligned}\quad (6.16)$$

Tenemos

$$\rho^{(1)} = \frac{1}{2} \left[|+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -| \right], \quad (6.17)$$

que corresponde al sistema despolarizado.

El segundo de los ejemplos anteriores nos muestra que, aunque el estado del sistema de dos espines es un estado puro, el estado de un espin individual puede ser un estado mezcla si los dos espines estan entrelazados. Esto quiere decir que en este caso no se puede atribuir un vector de estado al sistema 1.

7 Entropia

En nuestro segundo ejemplo anterior la matriz densidad $\rho^{(1)}$ corresponde al maximo desorden y minima informacion sobre el espin 1. Una medida de la informacion (o desorden) de un estado es la denominada **entropia de von Neumann** o **entropia estadistica**, definida como:

$$S_{vN} \equiv -\text{Tr} \left[\rho \log \rho \right] \quad (7.1)$$

En esta expresion el logaritmo de ρ se define a traves de su representacion espectral:

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad \implies \quad \log \rho = \sum_n \log(p_n) |\psi_n\rangle \langle \psi_n|, \quad (7.2)$$

siendo $\{|\psi_n\rangle\}$ una base ortonormal de autovectores de ρ . Entonces:

$$\rho \log \rho = \sum_n p_n \log(p_n) |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (7.3)$$

y la entropia de von Neumann puede escribirse como:

$$S_{vN} = - \sum_n p_n \log(p_n) \quad (7.4)$$

Puesto que $p_n \leq 1$ para todo n , se sigue de esta ultima expresion que $S_{vN} \geq 0$.

Estudiemos S_{vN} para algunos casos:

- Sea ρ la matriz densidad de un estado puro, que corresponde a tener la maxima informacion. Entonces ρ puede escribirse como $\rho = |\chi\rangle\langle\chi|$ y, en consecuencia:

$$\log \rho = \log(1)|\chi\rangle\langle\chi| = 0 . \quad (7.5)$$

Es decir:

$$\boxed{S_{vN} \Big|_{\text{estado puro}} = 0} \quad (7.6)$$

y S_{vN} tiene su minimo valor posible.

- Consideremos ahora un estado despolarizado. Esto corresponde a tener la maxima ignorancia. Si el espacio de Hilbert es de dimension N , entonces la matriz densidad es $\rho = \frac{1}{N} I_{N \times N}$, cuyo logaritmo es:

$$\log \rho = \log \left(\frac{1}{N} \right) I_{N \times N} . \quad (7.7)$$

Entonces:

$$\rho \log \rho = \frac{1}{N} \log \left(\frac{1}{N} \right) I_{N \times N} = -\frac{\log N}{N} I_{N \times N} , \quad (7.8)$$

cuya traza es:

$$\text{Tr}[\rho \log \rho] = -\frac{\log N}{N} \text{Tr} I_{N \times N} = -\log N . \quad (7.9)$$

Por consiguiente:

$$\boxed{S_{vN} \Big|_{\text{estado despolarizado}} = \log N} \quad (7.10)$$

Este es el valor maximo valor de la entropia de von Neumann que se puede obtener en un espacio de Hilbert de N estados.

A partir de estos ejemplos vemos que la entropia crece a medida que tenemos menos informacion sobre el estado del sistema.

7.1 Aplicacion a la mecanica estadistica

En la llamada colectividad canonica de la mecanica estadistica, la probabilidad de tener un estado con energia E_n en un sistema en equilibrio termodinamico a temperatura T es:

$$p_n = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_n}{kT}} , \quad (7.11)$$

siendo k la constante de Boltzmann y Z la denominada funcion de particion:

$$Z = \sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}} . \quad (7.12)$$

Observese que $\sum_n p_n = 1$, como debería de ser. La matriz densidad conteniendo la información del sistema en equilibrio termodinámico a temperatura T es:

$$\rho_T = \sum_n p_n |E_n\rangle \langle E_n| , \quad (7.13)$$

siendo $|E_n\rangle$ es el autoestado del operador hamiltoniano correspondiente al autovalor E_n . Substituyendo la expresión de los p_n para el colectivo canónico, tenemos:

$$\rho_T = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\frac{E_n}{kT}} |E_n\rangle \langle E_n| . \quad (7.14)$$

Esta expresión no es más que la descomposición espectral del operador $\frac{1}{Z} e^{-H/kT}$. Por tanto, podemos escribir ρ_T como:

$$\rho_T = \frac{1}{Z} e^{-H/kT} . \quad (7.15)$$

Observemos que la función de partición Z puede ponerse simplemente como:

$$Z = \text{Tr} \left[e^{-H/kT} \right] . \quad (7.16)$$

Por consiguiente, la matriz densidad ρ_T puede escribirse como:

$$\boxed{\rho_T = \frac{e^{-H/kT}}{\text{Tr} \left[e^{-H/kT} \right]}} \quad (7.17)$$

La **entropía termodinámica** del sistema a temperatura T se define como:

$$\boxed{S \equiv -k \text{Tr} \left[\rho_T \log \rho_T \right]} \quad (7.18)$$

Esta definición coincide básicamente con la entropía de von Neumann S_{vN} para la matriz densidad de la colectividad canónica. La diferencia entre S y S_{vN} es el factor k ($S = k S_{vN}(\rho = \rho_T)$), que se añade para hacer contacto con la definición habitual en termodinámica, en la que la entropía tiene unidades. Observemos que podemos expresar S como:

$$S = -k \langle \log \rho_T \rangle , \quad (7.19)$$

donde el valor esperado se calcula en el estado determinado por la matriz ρ_T . Teniendo en cuenta (7.13), escribamos S en la forma

$$S = -k \sum_n p_n \log p_n , \quad (7.20)$$

donde p_n son las probabilidades (7.11). Puesto que:

$$\log p_n = -\frac{E_n}{kT} - \log Z , \quad (7.21)$$

podemos escribir la entropía como:

$$S = -k \sum_n p_n \left[-\frac{E_n}{kT} - \log Z \right] = \frac{1}{T} \sum_n E_n p_n + k \log Z , \quad (7.22)$$

donde, en el segundo paso, hemos utilizado que $\sum_n p_n = 1$. Por otra parte $E = \sum_n E_n p_n$ es la energía interna del sistema (es decir el valor esperado de la energía). Por tanto, la entropía es:

$$S = \frac{E}{T} + k \log Z \quad (7.23)$$

La combinación:

$$F = E - T S , \quad (7.24)$$

es la denominada **energía libre de Helmholtz** . De la expresión (7.23) que hemos obtenido, se sigue que:

$$F = -k T \log Z \quad (7.25)$$

Equivalentemente, teniendo en cuenta (7.16), podemos escribir:

$$e^{-F/kT} = \text{Tr} \left(e^{-H/kT} \right) \quad (7.26)$$

8 Evolución temporal de la matriz densidad

Sea $\rho = \sum_n p_n |\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(t)|$ la matriz densidad de un sistema, donde los estados $|\psi_n(t)\rangle$ se toman en la imagen de Schrödinger y supondremos que las probabilidades p_n no dependen del tiempo. Puesto que:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_n\rangle = H |\psi_n\rangle , \quad i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi_n| = -\langle \psi_n| H , \quad (8.1)$$

obtenemos:

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = \sum_n p_n H |\psi_n\rangle \langle \psi_n| - \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| H = H \rho - \rho H . \quad (8.2)$$

Es decir

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [H, \rho] \quad (8.3)$$

Observese que ρ es un operador en la imagen de Schrödinger, a pesar de lo cual depende del tiempo. Su evolución temporal está determinada por el conmutador con el hamiltoniano, de forma similar a lo que ocurre con los operadores en la imagen de Heisenberg, aunque el signo con el que aparece el conmutador es diferente en ambos casos. Alternativamente, si $U(t, t_0)$ es el operador de evolución temporal, podemos escribir:

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^{-1}(t, t_0) \quad (8.4)$$

9 Paradoja EPR

Consideremos una partícula de espín $1/2$ en un estado en el cual la componente del espín a lo largo del eje z está bien definida y vale $+\hbar/2$. Denotemos este estado por $|+z\rangle$:

$$S_z |+z\rangle = \frac{\hbar}{2} |+z\rangle . \quad (9.1)$$

Tal como hemos demostrado anteriormente en (5.5) este estado puede expresarse como combinación lineal de los estados $|\pm x\rangle$, en los cuales la componente del espín a lo largo del eje x es $\pm\hbar/2$:

$$|+z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+x\rangle + |-x\rangle) , \quad S_x |\pm x\rangle = \pm\frac{\hbar}{2} |\pm x\rangle . \quad (9.2)$$

De acuerdo con los postulados de la mecánica cuántica, la medida de S_x en el estado $|+z\rangle$ da $+\hbar/2$ el 50% de las veces y $-\hbar/2$ el otro 50%. Después de una primera medida de S_x el valor se repite (sea $+\hbar/2$ o $-\hbar/2$) con el 100% de probabilidad. Esto quiere decir que el estado $|+z\rangle$ no tiene un valor bien definido de S_x (en realidad es como si tuviese simultáneamente los dos posibles valores $+\hbar/2$ y $-\hbar/2$). Solo después de la primera medida tiene S_x un valor bien definido.

Algunos autores, y muy en particular A. Einstein, consideraban esta interpretación absurda pues pensaban que las propiedades de los sistemas físicos tienen que tener una **realidad objetiva** y, en consecuencia, tener valores bien definidos independientemente de que los midamos o no. Esta escuela de pensamiento se denominó **realismo** y considera que los sistemas microscópicos poseen propiedades intrínsecas que son objetivamente reales y con valores bien definidos independientemente de que los observemos o no. Este punto de vista “realista” fue formulado con más precisión por A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen (EPR) en 1935. Más concretamente, EPR argumentaban que *si el valor de una propiedad física puede ser predicho con total certeza sin perturbar el sistema de ninguna manera, entonces hay un elemento de realidad asociado a dicha propiedad*. Estos autores formularon también el llamado principio de **localidad**, que establece que dos medidas efectuadas en dos regiones del espacio-tiempo no conectadas causalmente no pueden estar correlacionadas, de forma que no se contradiga la teoría especial de la relatividad.

EPR propusieron un experimento para demostrar que la mecánica cuántica lleva a resultados absurdos y debería ser sustituida por una teoría más completa. En este experimento dos partículas interactúan y luego se separan. En ciertos estados las medidas efectuadas sobre una partícula determinan los valores de las propiedades de la otra partícula, incluso cuando están muy alejadas entre sí y no pueden estar conectadas causalmente. Supongamos que tenemos una partícula inestable sin espín que inicialmente está en reposo y decae en dos partículas de espín $1/2$ que se mueven en direcciones opuestas. Un ejemplo podría ser un pión neutro π^0 que se desintegra en un electrón e^- y un positrón e^+ , según la reacción $\pi^0 \rightarrow e^+ + e^-$.

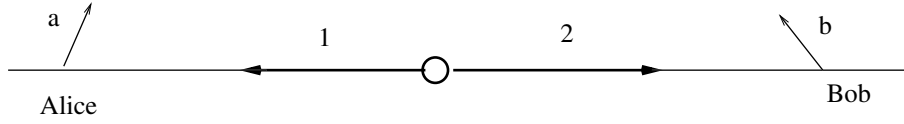


Figure 4: Dos físicos experimentales, Alice y Bob, miden las componentes del espín de las partículas entrelazadas que resultan de la desintegración de una partícula inicial.

Esta desintegración existe, aunque es rara, por lo que el experimento es difícil de realizar en la práctica.

Supongamos que dos físicos experimentales, convencionalmente llamados Alice y Bob, miden las componentes del espín de cada partícula a lo largo de un cierto eje cuando las partículas están mucho más alejadas que el rango de la interacción que hay entre ellas, de modo que podemos suponer que no han interactuado entre sí durante un largo tiempo. Es fácil ver que el estado del sistema de las dos partículas 1 y 2 que se produce es precisamente el estado entrelazado de Bell $|\phi\rangle$ definido en (2.9). Baste para ello comprobar que $|\phi\rangle$ es un estado de espín total cero. Verifiquemoslo para la componente z :

$$\begin{aligned} S_{1z} |\phi\rangle &= S_{1z} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|+z, -z\rangle - |-z, +z\rangle) \right] = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (|+z, -z\rangle + |-z, +z\rangle), \\ S_{2z} |\phi\rangle &= \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (-|+z, -z\rangle - |-z, +z\rangle). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Sumando estas expresiones, obtenemos:

$$\boxed{(S_{1z} + S_{2z})|\phi\rangle = 0} \quad (9.4)$$

Es fácil comprobarlo también para las otras componentes del espín. Así, puesto que $S_x|+z\rangle = \frac{\hbar}{2}| -z\rangle$ y $S_x|-z\rangle = \frac{\hbar}{2}|+z\rangle$, tenemos:

$$\begin{aligned} S_{1x} |\phi\rangle &= \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (|-z, -z\rangle - |+z, +z\rangle), \\ S_{2x} |\phi\rangle &= \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (|+z, +z\rangle - |-z, -z\rangle) = -S_{1x} |\phi\rangle. \end{aligned} \quad (9.5)$$

De forma similar, $S_y|+z\rangle = -i\frac{\hbar}{2}| -z\rangle$ y $S_y|-z\rangle = i\frac{\hbar}{2}|+z\rangle$ y:

$$\begin{aligned} S_{1y} |\phi\rangle &= \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (-i|-z, -z\rangle - i|+z, +z\rangle), \\ S_{2y} |\phi\rangle &= \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (i|+z, +z\rangle + i|-z, -z\rangle) = -S_{1y} |\phi\rangle. \end{aligned} \quad (9.6)$$

En definitiva, se verifica:

$$\boxed{(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)|\phi\rangle = 0} \quad (9.7)$$

De hecho el estado $|\phi\rangle$ es invariante bajo rotaciones y su expresion es la misma en todas las bases rotadas $|\pm \vec{n}\rangle$, para todo vector unitario \vec{n} . En efecto, probemos que:

$$\boxed{|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+\vec{n}, -\vec{n}\rangle - |-\vec{n}, +\vec{n}\rangle \right]} \quad (9.8)$$

Siendo,

$$\begin{aligned} |+\vec{n}\rangle &= e^{-\frac{i\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + e^{\frac{i\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle, \\ |-\vec{n}\rangle &= -e^{-\frac{i\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} |+\rangle + e^{\frac{i\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} |-\rangle. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Hagamos el producto tensorial:

$$\begin{aligned} |+\vec{n}, -\vec{n}\rangle &= \left(e^{-\frac{i\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + e^{\frac{i\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle \right) \left(-e^{-\frac{i\phi}{2}} \sin \frac{\theta}{2} |+\rangle + e^{\frac{i\phi}{2}} \cos \frac{\theta}{2} |-\rangle \right) = \\ &= -e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} |+, +\rangle + \cos^2 \frac{\theta}{2} |+, -\rangle - \\ &\quad - \sin^2 \frac{\theta}{2} |-, +\rangle + e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} |-, -\rangle. \end{aligned} \quad (9.10)$$

De forma similar:

$$\begin{aligned} |-\vec{n}, +\vec{n}\rangle &= -e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} |+, +\rangle - \sin^2 \frac{\theta}{2} |+, -\rangle = \\ &\quad + \cos^2 \frac{\theta}{2} |-, +\rangle + e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} |-, -\rangle. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} |+\vec{n}, -\vec{n}\rangle - |-\vec{n}, +\vec{n}\rangle &= \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \left[|+, -\rangle - |-, +\rangle \right] = \\ &= |+, -\rangle - |-, +\rangle = \sqrt{2} |\phi\rangle, \end{aligned} \quad (9.12)$$

que es el resultado que queriamos demostrar.

Supongamos que Alice y Bob tienen un aparato de Stern-Gerlach y que ambos lo orientan en la direccion del eje z . Supongamos tambien que las desintegraciones estan bien separadas en el tiempo, de modo que Alice y Bob saben que estan midiendo el espin de las particulas emitidas en la misma desintegracion. Cada uno de ellos obtiene una serie de resultados aleatorios $+\hbar/2$ y $-\hbar/2$. Despues de efectuar

sus medidas se reunen y observan que cada vez que uno midio $+\hbar/2$ el otro midio $-\hbar/2$ y viceversa, de forma que sus resultados estan perfectamente anticorrelacionados. Esta anticorrelacion se explica porque, como se puede comprobar de manera inmediata, el estado $|\phi\rangle$ es autovector de $S_{1z} S_{2z}$ con autovalor $-\hbar^2/4$:

$$S_{1z} S_{2z} |\phi\rangle = -\frac{\hbar^2}{4} |\phi\rangle . \quad (9.13)$$

Es por lo tanto imposible que ambos midan el mismo resultado. Recordemos que el estado $|\phi\rangle$ no tiene valores de S_{1z} y S_{2z} bien definidos. Sin embargo, una vez que la medida de S_{1z} se hace, esta incertidumbre desaparece y S_{2z} esta fijado ($S_{2z} = -S_{1z}$). En el formalismo cuantico una medida efectuada en un parte de un sistema constituido por dos partes entrelazadas es, en realidad, una medida del sistema como un conjunto. EPR consideraban esta correlacion como una inadmisibile accion a distancia y proponian una explicacion alternativa suponiendo que el espin de las particulas existe de manera intrinseca **antes de la medida**. El hecho que pueden tomar dos valores se debe a la accion de unas **variables ocultas**, que se desconocen y hacen que la mecanica cuantica sea una teoria incompleta. El caracter estadistico de la teoria se deberia a nuestra ignorancia y no a una propiedad intrinseca de los sistemas microscopicos.

De hecho la anticorrelacion de los espines no es dificil de explicar clasicamente. Supongamos que dos viajeros a y b parten en direcciones opuestas llevando cada una de ellos una maleta. Una de las maletas contiene una bola blanca y la otra una bola negra. Los viajeros cogieron las maletas al azar y no saben de que color es la bola que llevan. Cuando llegan a su destino pasan por el control de aduanas y sus maletas son inspeccionadas por Alice y Bob. Si Alice inspecciona la maleta del viajero a tiene un 50% de encontrar una bola blanca y otro 50% de que la bola sea negra. Si Alice encuentra una bola blanca sabe con el 100% de seguridad que Bob encontrara la bola negra en la maleta del viajero b . Lo que esta sucediendo en este ejemplo es que la correlacion entre las dos maletas fue introducida en el punto de salida y reaparece como una correlacion entre los resultados de Alice y Bob.

En realidad el resultado previsto por la mecanica cuantica es mas sutil porque si Alice y Bob deciden medir los espines a lo largo del eje x , en lugar del eje z , tambien encontraran una anticorrelacion perfecta porque:

$$S_{1x} S_{2x} |\phi\rangle = -\frac{\hbar^2}{4} |\phi\rangle . \quad (9.14)$$

Este resultado se puede comprobar de forma sencilla y es consecuencia de que $|\phi\rangle$ es invariante bajo rotaciones. Una demostracion indirecta es la siguiente. Como $(S_{1x} + S_{2x})|\phi\rangle = 0$, tambien se verifica que

$$(S_{1x} + S_{2x})^2 |\phi\rangle = 0 . \quad (9.15)$$

Pero, como $S_{1x}^2 = S_{2x}^2 = \hbar^2/4$, se tiene:

$$(S_{1x} + S_{2x})^2 |\phi\rangle = \left(2\frac{\hbar^2}{4} + 2S_{1x} S_{2x}\right) |\phi\rangle = 0 , \quad (9.16)$$

que es equivalente al resultado buscado (9.14). Es evidente que el resultado anterior vale también para cualquier componente del espín a lo largo de una dirección arbitraria debido a (9.7). Estos resultados implican que, sin perturbar de ninguna manera la partícula 2, las medidas de S_z y S_x por parte de Alice sobre la partícula 1 permitirían determinar con total certeza los valores de las componentes z y x del espín de la partícula 2. Si adoptamos el punto de vista del “realismo local” de EPR las componentes x e y del espín debe de tener entonces una realidad intrínseca, es decir deben de ser atributos bien definidos de la partícula. Vemos que esto está en contradicción con los principios de la mecánica cuántica pues S_z y S_x no conmutan y, por tanto, no pueden estar simultáneamente bien definidos, es decir no pueden ser simultáneamente atributos bien definidos de una partícula.

10 Desigualdades de Bell

Durante muchos años la discusión sobre la interpretación de la mecánica cuántica se mantuvo en un nivel filosófico-metafísico y se creía que era posible construir teorías con variables ocultas que reprodujeran los mismos resultados que la mecánica cuántica. En 1964 John Bell señaló que las teorías alternativas basadas en el principio de realismo local de EPR dan lugar a unas desigualdades entre cantidades observables que no son satisfechas por la mecánica cuántica, por lo que pueden ser usadas como un test de esta última.

Consideremos de nuevo la desintegración de una partícula de espín cero en dos partículas de espín $1/2$ y denotemos por 1 y 2 a estas últimas. Vamos a analizar este problema desde el punto de vista de una teoría con realismo local, en la cual el espín de las partículas es un atributo bien definido de estas. Supongamos que la experimental Alice mide el espín de la partícula 1 con su aparato de Stern-Gerlach y que el experimental Bob lo hace para la partícula 2. Alice y Bob se ponen de acuerdo en hacer medidas del espín a lo largo de tres direcciones \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} coplanares y en general no ortogonales. Si el espín está definido como una realidad objetiva cada partícula está caracterizada por sus tres proyecciones a lo largo de \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} . Denotemos por $(\lambda_a \vec{a}, \lambda_b \vec{b}, \lambda_c \vec{c})$, con $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c = \pm 1$, al estado con proyecciones de espín $\lambda_a \hbar/2$, $\lambda_b \hbar/2$ y $\lambda_c \hbar/2$ a lo largo de \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} . Observemos que si la partícula 1 está en la configuración $(\lambda_a \vec{a}, \lambda_b \vec{b}, \lambda_c \vec{c})$, necesariamente la partícula 2 debe de estar en la configuración $(-\lambda_a \vec{a}, -\lambda_b \vec{b}, -\lambda_c \vec{c})$, debido a la conservación del momento angular (el momento angular total debe de ser cero).

Hagamos una tabla con las diferentes configuraciones posibles y el número de eventos de cada una de ellas, es decir del número de partículas encontradas en cada estado. Como tenemos tres direcciones y en cada una de ellas el espín puede tomar dos valores, tendremos $2^3 = 8$ configuraciones. El número de eventos en cada configuración lo denotaremos por N_i , $i = 1, \dots, 8$. El número total de eventos se denotará por N :

$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_8 . \quad (10.1)$$

Número de eventos	Partícula 1	Partícula 2
N_1	$(+\vec{a}, +\vec{b}, +\vec{c})$	$(-\vec{a}, -\vec{b}, -\vec{c})$
N_2	$(+\vec{a}, +\vec{b}, -\vec{c})$	$(-\vec{a}, -\vec{b}, +\vec{c})$
N_3	$(+\vec{a}, -\vec{b}, +\vec{c})$	$(-\vec{a}, +\vec{b}, -\vec{c})$
N_4	$(+\vec{a}, -\vec{b}, -\vec{c})$	$(-\vec{a}, +\vec{b}, +\vec{c})$
N_5	$(-\vec{a}, +\vec{b}, +\vec{c})$	$(+\vec{a}, -\vec{b}, -\vec{c})$
N_6	$(-\vec{a}, +\vec{b}, -\vec{c})$	$(+\vec{a}, -\vec{b}, +\vec{c})$
N_7	$(-\vec{a}, -\vec{b}, +\vec{c})$	$(+\vec{a}, +\vec{b}, -\vec{c})$
N_8	$(-\vec{a}, -\vec{b}, -\vec{c})$	$(+\vec{a}, +\vec{b}, +\vec{c})$

Sea $P(+\vec{a}, +\vec{b})$ la probabilidad de que la partícula 1 tenga espín $+\hbar/2$ en la dirección \vec{a} y que la partícula 2 tenga espín $+\hbar/2$ en la dirección \vec{b} . Es decir $P(+\vec{a}, +\vec{b})$ es la probabilidad de la configuración con $S_{1a} = +\hbar/2$ y $S_{2b} = +\hbar/2$. Estos valores de S_{1a} y S_{2b} se corresponden con las configuraciones 3 y 4 en la tabla. Entonces:

$$P(+\vec{a}, +\vec{b}) = \frac{N_3 + N_4}{N} . \quad (10.2)$$

De forma similar, sea $P(+\vec{a}, +\vec{c})$ la probabilidad de los estados con $S_{1a} = +\hbar/2$ y $S_{2c} = +\hbar/2$. Estos estados corresponden a las configuraciones 2 y 4 de la tabla y, por consiguiente, su probabilidad es:

$$P(+\vec{a}, +\vec{c}) = \frac{N_2 + N_4}{N} . \quad (10.3)$$

Finalmente, denotemos por $P(+\vec{c}, +\vec{b})$ a la probabilidad de los estados con $S_{1c} = +\hbar/2$ y $S_{2b} = +\hbar/2$, correspondientes a las configuraciones 3 y 7 de la tabla. Esta probabilidad es:

$$P(+\vec{c}, +\vec{b}) = \frac{N_3 + N_7}{N} . \quad (10.4)$$

Entonces, tenemos:

$$P(+\vec{a}, +\vec{b}) = \frac{N_3 + N_4}{N} \leq \frac{N_3 + N_4 + N_2 + N_7}{N} = \frac{N_3 + N_7}{N} + \frac{N_2 + N_4}{N} . \quad (10.5)$$

Teniendo en cuenta (10.3) y (10.4), obtenemos la **desigualdad de Bell**:

$$\boxed{P(+\vec{a}, +\vec{b}) \leq P(+\vec{a}, +\vec{c}) + P(+\vec{c}, +\vec{b})} \quad (10.6)$$

Veamos ahora cual es la prediccion de la mecanica cuantica. La primera de las probabilidades buscadas es:

$$P(+\vec{a}, +\vec{b}) = |\langle +\vec{a}, +\vec{b} | \phi \rangle|^2 . \quad (10.7)$$

Para calcularla expresemos $|\phi\rangle$ en terminos de los estados $|\pm \vec{a}\rangle$. Segun (9.8), tenemos:

$$\boxed{|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+\vec{a}, -\vec{a}\rangle - |-\vec{a}, +\vec{a}\rangle \right]} \quad (10.8)$$

Entonces:

$$\langle +\vec{a}, +\vec{b} | \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\langle +\vec{a}, +\vec{b} | \left(|+\vec{a}, -\vec{a}\rangle - |-\vec{a}, +\vec{a}\rangle \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle +\vec{a} | +\vec{a} \rangle_1 \langle +\vec{b} | -\vec{a} \rangle_2 , \quad (10.9)$$

donde los subindices 1 y 2 se refieren a las dos particulas. La condicion de normalizacion implica que $\langle +\vec{a} | +\vec{a} \rangle_1 = 1$. Por lo tanto, eliminando el subindice 2 en el producto $\langle +\vec{b} | -\vec{a} \rangle$, obtenemos:

$$\langle +\vec{a}, +\vec{b} | \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle +\vec{b} | -\vec{a} \rangle . \quad (10.10)$$

Los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} son coplanares. Supongamos que escogemos nuestros ejes coordenados de manera que estos vectores esten en el semiplano xz que corresponde a tomar la coordenada esferica $\phi = 0$. Entonces (vease la figura 5):

$$|+\vec{b}\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_b}{2} \\ \text{sen} \frac{\theta_b}{2} \end{pmatrix} , \quad |-\vec{a}\rangle = \begin{pmatrix} -\text{sen} \frac{\theta_a}{2} \\ \cos \frac{\theta_a}{2} \end{pmatrix} , \quad (10.11)$$

donde, para obtener $|+\vec{b}\rangle$ y $|-\vec{a}\rangle$ hemos utilizado (9.9) con $\phi = 0$. Por lo tanto:

$$\langle +\vec{b} | -\vec{a} \rangle = -\cos \frac{\theta_b}{2} \text{sen} \frac{\theta_a}{2} + \text{sen} \frac{\theta_b}{2} \cos \frac{\theta_a}{2} = \text{sen} \frac{\theta_b - \theta_a}{2} . \quad (10.12)$$

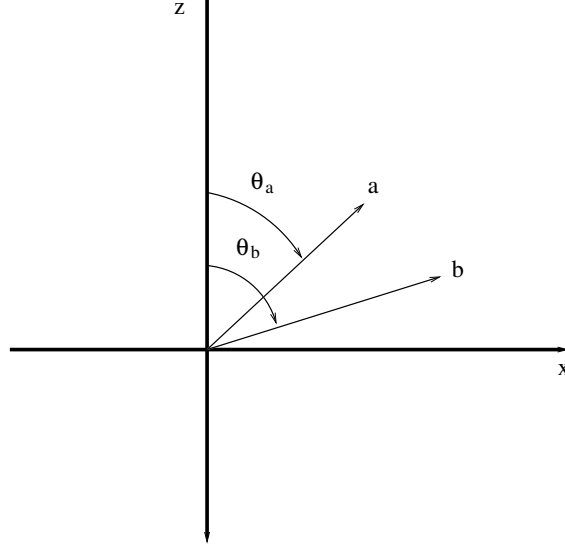


Figure 5: Los vectores \vec{a} y \vec{b} están en el plano xz y forman un ángulo θ_a y θ_b , respectivamente, respecto del eje z .

Sea $\theta_{ab} = \theta_b - \theta_a$ el ángulo formado por los vectores \vec{b} y \vec{a} . El resultado que acabamos de obtener se puede escribir como:

$$\langle +\vec{a}, +\vec{b} | \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen} \frac{\theta_{ab}}{2} \quad (10.13)$$

En consecuencia la probabilidad que queríamos calcular es:

$$P(+\vec{a}, +\vec{b}) = \frac{1}{2} \text{sen}^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \quad (10.14)$$

Como comprobación de este resultado observemos que si $\vec{b} = \vec{a}$ la fórmula anterior da $P(+\vec{a}, +\vec{b}) = 0$, como debería de ser porque el momento angular total es cero. Además, si $\vec{b} = -\vec{a}$ el ángulo relativo es $\theta_{ab} = \pi$ y la probabilidad es $1/2$, tal como era de esperar. Obviamente las otras probabilidades de la desigualdad de Bell (10.6) también dependen de los ángulos formados por los vectores. Sean:

$$\theta_{ac} = \widehat{\vec{a}\vec{c}}, \quad \theta_{cb} = \widehat{\vec{c}\vec{b}}. \quad (10.15)$$

Entonces, las probabilidades buscadas son:

$$P(+\vec{a}, +\vec{c}) = \frac{1}{2} \text{sen}^2 \frac{\theta_{ac}}{2}, \quad P(+\vec{c}, +\vec{b}) = \frac{1}{2} \text{sen}^2 \frac{\theta_{cb}}{2}, \quad (10.16)$$

y la desigualdad de Bell (10.6) se reduce a:

$$\text{sen}^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \leq \text{sen}^2 \frac{\theta_{ac}}{2} + \text{sen}^2 \frac{\theta_{cb}}{2} \quad (10.17)$$

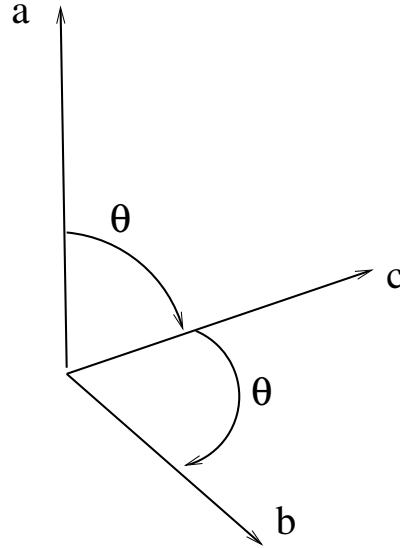


Figure 6: Configuración en la cual el vector \vec{c} está dirigido a lo largo de la bisectriz del ángulo formado por \vec{a} y \vec{b} .

Es fácil ver que esta desigualdad no se satisface para ciertas orientaciones de los vectores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Como ejemplo supongamos que \vec{c} está en la dirección de la bisectriz del ángulo formado por \vec{a} y \vec{b} , tal como muestra la figura 6. En este caso $\theta_{ac} = \theta_{cb} = \theta$ y, por tanto, $\theta_{ab} = 2\theta$. La desigualdad (10.17) se reduce a:

$$\sin^2\theta \leq 2 \sin^2\frac{\theta}{2}, \quad (10.18)$$

que se viola para ángulos $0 < \theta < \pi/2$. Por ejemplo, para $\theta = \pi/3$ se tiene que $\sin\theta = \sqrt{3}/2$ y $\sin\theta/2 = 1/2$ y la desigualdad anterior sería:

$$\frac{3}{4} \leq \frac{1}{2}, \quad (10.19)$$

que obviamente es falsa. Vemos que las predicciones de una teoría realista local no están de acuerdo con las que se obtienen con la mecánica cuántica. Todas las observaciones experimentales de esta desigualdad (y de otras similares) confirman las predicciones de la mecánica cuántica y están en desacuerdo con las de las teorías de las variables ocultas basadas en la noción de realismo local. Obsérvese que la correlación observada no implica la propagación de señales a velocidades mayores que la de la luz porque dichas correlaciones solo aparecen cuando Alice y Bob comparan sus datos.

11 Entrelazamiento de tres partículas

Estudiemos ahora ciertos estados de tres partículas que exhiben propiedades no clásicas de forma muy espectacular. Estos estados son los denominados estados GHZ, que son las siglas de Greenberger, Horne y Zeilinger. Consideremos que una partícula inestable se desintegra en tres partículas de espín 1/2 que son emitidas en un plano, en una configuración en la cual los tres momentos forman entre ellos un ángulo de $2\pi/3$. Las tres partículas se emiten en el siguiente estado entrelazado de espín:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+++ \rangle - |-- \rangle \right), \quad (11.1)$$

donde $+$ y $-$ denotan el signo del autovalor de σ_z .

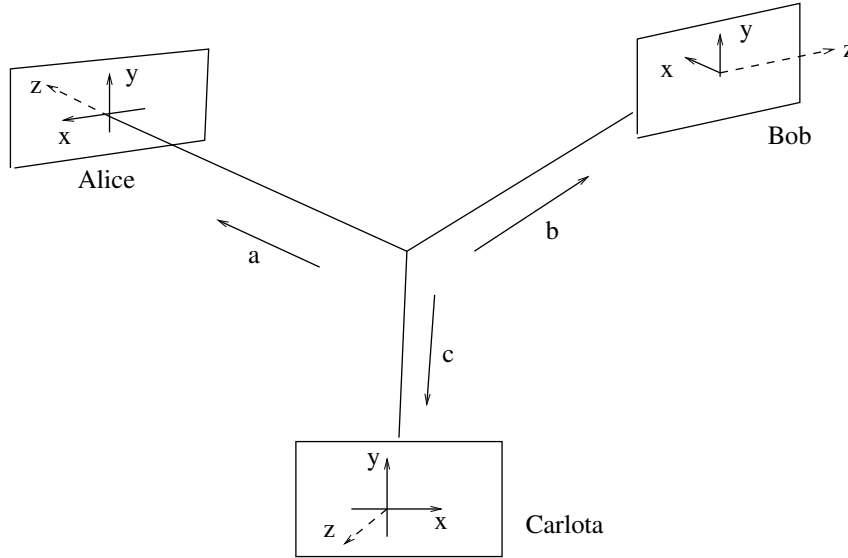


Figure 7: Esquema del experimento GHZ. Tres físicos experimentales (Alice, Bob y Carlota) miden el espín de las tres partículas en el estado (11.1) a lo largo de los ejes ortogonales a su dirección de propagación.

Tres físicos experimentales Alice (a), Bob (b) y Carlota (c) miden el espín en las direcciones perpendiculares a la dirección de propagación de cada partícula. El eje z para cada experimental es la dirección de propagación de la partícula, el eje y es siempre vertical (perpendicular al plano) y el eje x se escoge de modo que los vectores unitarios satisfacen $\vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_z$. Consideremos los tres operadores Σ_a , Σ_b y Σ_c definidos como:

$$\Sigma_a = \sigma_{ax} \sigma_{by} \sigma_{cy}, \quad \Sigma_b = \sigma_{ay} \sigma_{bx} \sigma_{cy}, \quad \Sigma_c = \sigma_{ay} \sigma_{by} \sigma_{cx}, \quad (11.2)$$

donde el índice a, b, c de las σ 's denota las tres partículas. En los tres operadores Σ hay dos σ_y y una σ_x y el índice a, b, c de Σ indica la posición de la matriz σ_x . Las

matrices σ de dos partículas distintas actúan sobre espacios de Hilbert diferentes y por tanto conmutan. Así, por ejemplo:

$$\sigma_{ax} \sigma_{by} = \sigma_{by} \sigma_{ax} . \quad (11.3)$$

Por otra parte las matrices σ_x y σ_y actuando sobre el mismo espacio anticonmutan y su cuadrado es la unidad. Probemos que:

1) Las Σ 's conmutan entre sí:

$$[\Sigma_a, \Sigma_b] = [\Sigma_a, \Sigma_c] = [\Sigma_b, \Sigma_c] = 0 . \quad (11.4)$$

2) El cuadrado de las Σ 's es uno:

$$\Sigma_a^2 = \Sigma_b^2 = \Sigma_c^2 = 1 . \quad (11.5)$$

• Prueba de 1)

Verifiquemos la conmutación de Σ_a y Σ_b . Para cualquier otro par de Σ 's la demostración es similar. Para demostrarlo movamos las matrices σ de Σ_b en el producto $\Sigma_a \Sigma_b$ de la derecha a la izquierda de Σ_a :

$$\begin{aligned} \Sigma_a \Sigma_b &= \sigma_{ax} \sigma_{by} \sigma_{cy} \sigma_{ay} \sigma_{bx} \sigma_{cy} = -\sigma_{ay} \sigma_{ax} \sigma_{by} \sigma_{cy} \sigma_{bx} \sigma_{cy} = \\ &= \sigma_{ay} \sigma_{bx} \sigma_{ax} \sigma_{by} \sigma_{cy} \sigma_{cy} = \sigma_{ay} \sigma_{bx} \sigma_{cy} \sigma_{ax} \sigma_{by} \sigma_{cy} = \Sigma_b \Sigma_a . \end{aligned} \quad (11.6)$$

• Prueba de 2)

Comprobemos que $\Sigma_a^2 = 1$.

$$\Sigma_a^2 = \sigma_{ax} \sigma_{by} \sigma_{cy} \sigma_{ax} \sigma_{by} \sigma_{cy} = (\sigma_{ax})^2 \sigma_{by} \sigma_{cy} \sigma_{by} \sigma_{cy} = \sigma_{by} (\sigma_{cy})^2 \sigma_{by} = (\sigma_{by})^2 = 1 . \quad (11.7)$$

De forma similar se prueba que $\Sigma_b^2 = \Sigma_c^2 = 1$.

De la propiedad 1) se sigue que Σ_a , Σ_b y Σ_c son simultáneamente diagonalizables. Como su cuadrado es la identidad sus autovalores son ± 1 . De hecho vamos a demostrar que el estado GHZ es un autovector de todos ellos con autovalor igual a +1:

$$\boxed{\Sigma_a |GHZ\rangle = \Sigma_b |GHZ\rangle = \Sigma_c |GHZ\rangle = |GHZ\rangle} \quad (11.8)$$

Vamos a comprobarlo para Σ_a . Los otros dos casos son equivalentes. Para demostrarlo recordemos como actúan σ_y y σ_x :

$$\begin{aligned} \sigma_x |+\rangle &= |-\rangle , & \sigma_x |-\rangle &= |+\rangle , \\ \sigma_y |+\rangle &= i |-\rangle , & \sigma_y |-\rangle &= -i |+\rangle . \end{aligned} \quad (11.9)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\Sigma_a |+++ \rangle &= \sigma_{ax} \sigma_{by} \sigma_{cy} |+++ \rangle = (+)(i)(i) |--- \rangle = -|--- \rangle , \\ \Sigma_a |-- \rangle &= \sigma_{ax} \sigma_{by} \sigma_{cy} |-- \rangle = (+)(-i)(-i) |+++ \rangle = -|+++ \rangle .\end{aligned}\quad (11.10)$$

Por consiguiente, tenemos:

$$\Sigma_a |GHZ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\Sigma_a |+++ \rangle - \Sigma_a |-- \rangle \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-|--- \rangle + |+++ \rangle \right] = |GHZ \rangle ,\quad (11.11)$$

que es lo que queriamos demostrar. Supongamos que los tres experimentales orientan su aparato de Stern-Gerlach en las direcciones (x, y, y) , (y, x, y) y (y, y, x) , es decir uno de ellos lo orienta en la direccion x y los otros dos en la direccion y . Dado que el estado $|GHZ \rangle$ es un autovector de Σ_a , Σ_b y Σ_c con autovalor $+1$, esta claro que el producto de los tres resultados de Alice, Bob y Carlota en las tres configuraciones siempre sera $+1$.

Consideremos ahora el operador relevante en la configuracion (x, x, x) , es decir:

$$\boxed{\Sigma = \sigma_{ax} \sigma_{bx} \sigma_{cx}} \quad (11.12)$$

Como:

$$\sigma_{ax} \sigma_{bx} \sigma_{cx} |+++ \rangle = |-- \rangle , \quad \sigma_{ax} \sigma_{bx} \sigma_{cx} |-- \rangle = |+++ \rangle , \quad (11.13)$$

se tiene que:

$$\boxed{\Sigma |GHZ \rangle = -|GHZ \rangle} \quad (11.14)$$

Es decir, en la configuracion (x, x, x) el producto de las medidas de Alice, Bob y Carlota es siempre -1 . De hecho, probemos la siguiente igualdad entre operadores:

$$\boxed{\Sigma = -\Sigma_a \Sigma_b \Sigma_c} \quad (11.15)$$

Demostracion

$$\begin{aligned}\Sigma_a \Sigma_b \Sigma_c &= \sigma_{ax} \sigma_{by} \sigma_{cy} \sigma_{ay} \sigma_{bx} \sigma_{cy} \sigma_{ay} \sigma_{by} \sigma_{cx} = \sigma_{ax} \sigma_{by} \sigma_{cy} (\sigma_{ay})^2 \sigma_{bx} \sigma_{cy} \sigma_{by} \sigma_{cx} = \\ &= \sigma_{ax} \sigma_{by} (\sigma_{cy})^2 \sigma_{bx} \sigma_{by} \sigma_{cx} = -\sigma_{ax} (\sigma_{by})^2 \sigma_{bx} \sigma_{cx} = -\sigma_{ax} \sigma_{bx} \sigma_{cx} = -\Sigma .\end{aligned}\quad (11.16)$$

Estudiemos ahora cual seria la prediccion de una teoria con realismo local. Si las particulas estan suficientemente alejadas tendran sus propias caracteristicas fisicas, que se supone que tienen una realidad objetiva. Denotemos:

$$A_x, A_y \rightarrow \text{resultado de la medida de la componente } x \text{ o } y \text{ por Alice} . \quad (11.17)$$

De forma similar (B_x, B_y) y (C_x, C_y) denotan los resultados medidos por Bob y Carlota. Cuando se mide en las configuraciones (x, y, y) , (y, x, y) y (y, y, x) el producto de los resultados es siempre $+1$, es decir:

$$A_x B_y C_y = +1, \quad A_y B_x C_y = +1 \quad A_y B_y C_x = +1. \quad (11.18)$$

Por otra parte, dado que $A_y^2 = B_y^2 = C_y^2 = +1$, podemos escribir:

$$A_x B_x C_x = (A_x B_y C_y) (A_y B_x C_y) (A_y B_y C_x) = +1, \quad (11.19)$$

donde hemos utilizado que $A_x, A_y, B_x, B_y, C_x, C_y$ conmutan porque, en las teorías alternativas a la mecánica cuántica que estamos analizando, son simples números. Así pues $A_x B_x C_x = +1$, en contradicción con el resultado cuántico de las medidas (¡ y con los datos experimentales !) en la configuración (x, x, x) . En este caso no tenemos una desigualdad que se viola en mecánica cuántica sino una **contradicción directa entre el resultado cuántico y las teorías basadas en el realismo local**.

El punto clave en el análisis de este sistema es que, aunque los operadores Σ_a, Σ_b y Σ_c conmutan entre sí, están formados por productos de operadores que no conmutan individualmente entre sí (por ejemplo σ_{ax} y σ_{ay}). El error cometido desde el punto de vista clásico es que hemos asignado valores bien definidos a las medidas de estos observables que anticonmutan y, por lo tanto, son incompatibles entre sí.

12 Introducción a la teoría cuántica de la información

La teoría cuántica de la información es la teoría del procesamiento y transmisión de información usando las propiedades específicas de la mecánica cuántica, tales como el principio de superposición o el entrelazamiento cuántico. Debido al desarrollo espectacular de las técnicas experimentales, que permiten manipular sistemas cuánticos individuales (átomos, fotones, etc), muchos de los “experimentos mentales” de los inicios de la mecánica cuántica son experimentos realizables (¡y en muchos casos han sido realizados!). Esto ha permitido alcanzar una mayor comprensión de las ideas profundas subyacentes a la física cuántica y, al mismo tiempo, ha dado lugar a nuevas aplicaciones de estas ideas en campos como las telecomunicaciones, la criptografía o la computación. En esta sección vamos a exponer muy brevemente algunos de estos desarrollos.

Como un primer resultado demostremos el llamado **teorema de no clonación cuántica**, que establece que no es posible duplicar un estado cuántico arbitrario por medio de una transformación unitaria. Supongamos que tenemos un estado arbitrario $|\psi\rangle$, que queremos duplicar en un estado en blanco $|0\rangle$, que hace las veces de hoja en blanco. Buscamos una transformación unitaria U que nos lleve del estado $|\psi\rangle \otimes |0\rangle$ al estado $|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$, es decir tal que

$$\boxed{U |\psi\rangle \otimes |0\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle} \quad (12.1)$$

para un $|\psi\rangle$ arbitrario. Veamos que un operador de este tipo no existe, es decir:

Teorema

Una transformacion unitaria no puede hacer copias identicas de un estado cuantico arbitrario

Demostracion Supongamos que existe el operador de copia U . Consideremos la accion de U sobre dos estados arbitrarios $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$:

$$U|\psi\rangle \otimes |0\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle, \quad U|\phi\rangle \otimes |0\rangle = |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle. \quad (12.2)$$

Puesto que U es lineal, su actuacion sobre una combinacion de estados $(\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle) \otimes |0\rangle$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, es:

$$\begin{aligned} U(\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle) \otimes |0\rangle &= \alpha U|\psi\rangle \otimes |0\rangle + \beta U|\phi\rangle \otimes |0\rangle = \\ &= \alpha|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle + \beta|\phi\rangle \otimes |\phi\rangle. \end{aligned} \quad (12.3)$$

El segundo miembro de esta ultima ecuacion no es la duplicacion del estado $\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle$, que seria:

$$\begin{aligned} (\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle) \otimes (\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle) &= \\ &= \alpha^2|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle + \alpha\beta|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle + \beta\alpha|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle + \beta^2|\phi\rangle \otimes |\phi\rangle. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Observemos que la imagen de U es genericamente un estado entrelazado y no un estado producto (como deberia ser siempre una copia). No hay contradiccion si los terminos cruzados se anulan (es decir si $\alpha = 0$ o $\beta = 0$). Algunos estados de este tipo se pueden copiar, pero no una combinacion general.

En la teoria de la informacion la unidad elemental es el **bit**, que puede tomar dos valores, que convencionalmente se toman como 0 y 1. Un bit se almacena en un sistema de dos estados como, por ejemplo, un condensador que puede estar descargado (entonces vale 0) o cargado (en ese caso vale 1). Normalmente la carga del condensador en un ordenador ordinario corresponde a la de $10^4 - 10^5$ electrones. La pregunta interesante es que sucede cuando almacenamos informacion en un sistema cuantico individual de dos estados. Supongamos que denotamos los vectores de la base del correspondiente espacio de Hilbert como:

$$|0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (12.5)$$

En esta notacion $|0\rangle$ y $|1\rangle$ corresponden a los valores 0 y 1 del bit clasico. Contrariamente al sistema clasico, que puede estar solo en los dos estados 0 y 1, el sistema

cuántico puede estar en un estado que sea una combinación lineal de $|0\rangle$ y $|1\rangle$, es decir en un estado del tipo:

$$|\varphi\rangle = \lambda|0\rangle + \mu|1\rangle, \quad |\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1. \quad (12.6)$$

En lugar de almacenar un bit de información, el sistema cuántico almacena un **bit cuántico**, o también llamado **qubit**. Es decir **un qubit es la información que contiene un sistema cuántico de dos niveles**. De alguna forma, un qubit contiene simultáneamente los dos posibles valores 0 y 1. Este hecho se conoce como **paralelismo cuántico** y es la razón por la cual la (futura) computación cuántica es mucho más potente que la computación clásica basada en bits. Recordemos, sin embargo, que para obtener el valor 0 o 1 del qubit debemos de efectuar una medida que nos proyecta sobre uno de los posibles estados $|0\rangle$ o $|1\rangle$ con probabilidades $|\lambda|^2$ y $|\mu|^2$, es decir que después de la medida el sistema está en el estado $|0\rangle$ o $|1\rangle$. Este hecho es similar al caso clásico. La diferencia estriba en que el principio de superposición permite cierto paralelismo en las operaciones.

Combinando varios qubits se obtienen los llamados **registros cuánticos**. Un registro de n qubits es un estado del espacio de Hilbert 2^n -dimensional obtenido haciendo n copias de \mathcal{H} , es decir $\overbrace{\mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}}^n$. Si $n = 2$ tenemos 2 qubits y una base con 4 posibles estados:

$$|0,0\rangle, \quad |0,1\rangle, \quad |1,0\rangle, \quad |1,1\rangle. \quad (12.7)$$

Describamos este espacio de dimensión 4 en una base de estados entrelazados, la denominada **base de Bell**, constituida por los vectores:

$$\boxed{|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0,1\rangle \pm |1,0\rangle), \quad |\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0,0\rangle \pm |1,1\rangle)} \quad (12.8)$$

Estos vectores están normalizados y son ortogonales entre sí. Observemos que $|\psi^-\rangle$ es el estado $|\phi\rangle$ de (2.9). Los estados $|\psi^\pm\rangle$ y $|\phi^\pm\rangle$ se llaman colectivamente **estados de Bell**. La transformación inversa de (12.8) es:

$$\begin{aligned} |0,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi^+\rangle + |\phi^-\rangle), & |0,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi^+\rangle + |\psi^-\rangle), \\ |1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi^+\rangle - |\psi^-\rangle), & |1,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi^+\rangle - |\phi^-\rangle). \end{aligned} \quad (12.9)$$

Veamos que se pueden definir dos observables cuya medida proyecta sobre uno de los cuatro estados de Bell. Utilicemos la notación “informática” y definamos:

$$\begin{aligned} X_1 &= \sigma_x \otimes 1, & X_2 &= 1 \otimes \sigma_x, \\ Z_1 &= \sigma_z \otimes 1, & Z_2 &= 1 \otimes \sigma_z. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Calculemos la accion de X_1 y X_2 sobre los estados de Bell (12.8) usando $\sigma_x|0\rangle = |1\rangle$ y $\sigma_x|1\rangle = |0\rangle$:

$$\begin{aligned} X_1 |\psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [X_1 |0, 1\rangle \pm X_1 |1, 0\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1, 1\rangle \pm |0, 0\rangle] = \pm |\phi^\pm\rangle, \\ X_2 |\psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [X_2 |0, 1\rangle \pm X_2 |1, 0\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0, 0\rangle \pm |1, 1\rangle] = |\phi^\pm\rangle. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Es decir:

$$\boxed{X_1 |\psi^\pm\rangle = \pm |\phi^\pm\rangle} \quad \boxed{X_2 |\psi^\pm\rangle = |\phi^\pm\rangle} \quad (12.12)$$

Multipliquemos la primera de las ecuaciones en (12.12) por X_1 y usemos que $X_1^2 = 1$:

$$|\psi^\pm\rangle = \pm X_1 |\phi^\pm\rangle. \quad (12.13)$$

De forma similar, si multiplicamos la segunda ecuacion en 12.12) por X_2 , llegamos a:

$$|\psi^\pm\rangle = X_2 |\phi^\pm\rangle. \quad (12.14)$$

Agrupando estos ultimos resultados podemos escribir:

$$\boxed{X_1 |\phi^\pm\rangle = \pm |\psi^\pm\rangle} \quad \boxed{X_2 |\phi^\pm\rangle = |\psi^\pm\rangle} \quad (12.15)$$

Definamos ahora el operador:

$$\boxed{S \equiv X_1 X_2} \quad (12.16)$$

Veamos que los estados de Bell son autoestados de S :

$$\boxed{S |\psi^\pm\rangle = \pm |\psi^\pm\rangle} \quad \boxed{S |\phi^\pm\rangle = \pm |\phi^\pm\rangle} \quad (12.17)$$

La demostracion es la siguiente:

$$\begin{aligned} S |\psi^\pm\rangle &= X_1 X_2 |\psi^\pm\rangle = X_1 |\phi^\pm\rangle = \pm |\psi^\pm\rangle, \\ S |\phi^\pm\rangle &= X_1 X_2 |\phi^\pm\rangle = X_1 |\psi^\pm\rangle = \pm |\phi^\pm\rangle. \end{aligned} \quad (12.18)$$

Calculemos tambien la accion de Z_1 y Z_2 usando $\sigma_z |0\rangle = |0\rangle$ y $\sigma_z |1\rangle = -|1\rangle$. De hecho, si definimos el operador

$$\boxed{Q \equiv Z_1 Z_2} \quad (12.19)$$

tenemos:

$$\begin{aligned} Q |\psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [Z_1 Z_2 |0, 1\rangle \pm Z_1 Z_2 |1, 0\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}} [-|0, 1\rangle \mp |1, 0\rangle], \\ Q |\phi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [Z_1 Z_2 |0, 0\rangle \pm Z_1 Z_2 |1, 1\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0, 0\rangle \pm |1, 1\rangle]. \end{aligned} \quad (12.20)$$

Es decir:

$$\boxed{Q|\psi^\pm\rangle = -|\psi^\pm\rangle} \quad \boxed{Q|\phi^\pm\rangle = |\phi^\pm\rangle} \quad (12.21)$$

Observemos que $Q^2 = S^2 = 1$, lo cual implica que los autovalores de S y Q son ± 1 . Claramente, midiendo S y Q proyectamos sobre un estado de Bell determinado. Midiendo Q identificamos sobre que tipo de estado ($|\psi\rangle$ o $|\phi\rangle$) proyectamos. Midiendo S identificamos el signo \pm del estado. Tenemos así la tabla:

Q	S	Estado
+	+	$ \phi^+\rangle$
+	-	$ \phi^-\rangle$
-	+	$ \psi^+\rangle$
-	-	$ \psi^-\rangle$

13 Teleportacion cuantica

La teleportacion cuantica es una aplicacion del entrelazamiento cuantico para transferir informacion entre dos observadores. Supongamos que Alice quiere transferir a Bob el estado $|\psi\rangle_A$ de una partícula de espín 1/2, siendo:

$$|\psi\rangle_A = \lambda|0\rangle_A + \mu|1\rangle_A . \quad (13.1)$$

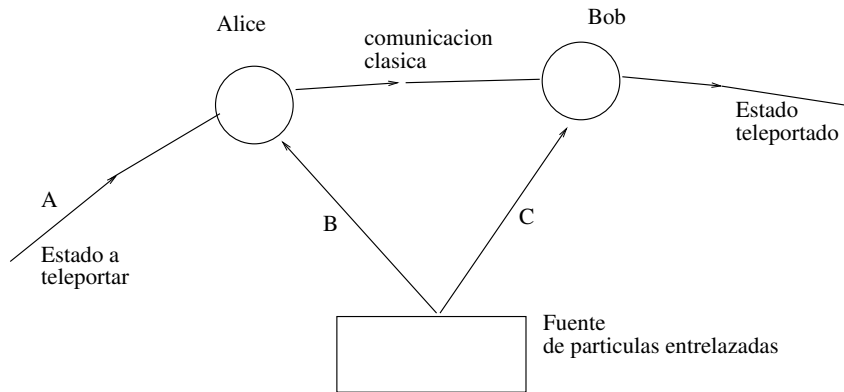


Figure 8: Esquema de un experimento de teleportacion cuantica.

Alice quiere transmitir a Bob el estado de esta partícula sin enviarla directamente. No puede medir el espín porque cualquier medida proyectaría $|\psi\rangle_A$ sobre otro estado, es decir destruiría el estado. Para conseguir su objetivo Alice y Bob usan un par de partículas de espín 1/2 (B y C) entrelazadas, que son emitidas desde una fuente. La partícula B es enviada a Alice y la C a Bob, tal como se indica en la figura 8.

Supongamos que el estado entrelazado emitido desde la fuente sea el estado de Bell:

$$|\psi^-\rangle_{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0,1\rangle_{BC} - |1,0\rangle_{BC} \right). \quad (13.2)$$

Lo que sigue podria hacerse con cualquier otro estado entrelazado. Alice y Bob deben de ponerse de acuerdo en cual utilizar. En el caso de que escojan $|\psi^-\rangle_{BC}$, el estado total de las tres particulas A , B y C es:

$$|\chi\rangle_{ABC} = |\psi\rangle_A \otimes |\psi^-\rangle_{BC} = (\lambda|0\rangle_A + \mu|1\rangle_A) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0,1\rangle_{BC} - |1,0\rangle_{BC} \right). \quad (13.3)$$

Es decir:

$$|\chi\rangle_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\lambda|0,0,1\rangle_{ABC} + \mu|1,0,1\rangle_{ABC} - \lambda|0,1,0\rangle_{ABC} - \mu|1,1,0\rangle_{ABC} \right]. \quad (13.4)$$

Escribamos este resultado en la base de Bell de las particulas A y B . Usando las formulas (12.9) de la transformacion inversa, obtenemos:

$$|\chi\rangle_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\lambda}{\sqrt{2}} (|\psi^+\rangle_{AB} + |\phi^-\rangle_{AB})|1\rangle_C + \frac{\mu}{\sqrt{2}} (|\psi^+\rangle_{AB} - |\psi^-\rangle_{AB})|1\rangle_C - \right. \\ \left. - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (|\psi^+\rangle_{AB} + |\psi^-\rangle_{AB})|0\rangle_C - \frac{\mu}{\sqrt{2}} (|\phi^+\rangle_{AB} - |\phi^-\rangle_{AB})|0\rangle_C \right]. \quad (13.5)$$

Agrupando terminos, llegamos a:

$$|\chi\rangle_{ABC} = \frac{1}{2} \left[|\psi^-\rangle_{AB} (-\lambda|0\rangle_C - \mu|1\rangle_C) + |\psi^+\rangle_{AB} (-\lambda|0\rangle_C + \mu|1\rangle_C) + \right. \\ \left. + |\phi^+\rangle_{AB} (-\mu|0\rangle_C + \lambda|1\rangle_C) + |\phi^-\rangle_{AB} (\mu|0\rangle_C + \lambda|1\rangle_C) \right]. \quad (13.6)$$

Expresemos este resultado en terminos del estado:

$$|\varphi\rangle_C = \lambda|0\rangle_C + \mu|1\rangle_C, \quad (13.7)$$

y del resultado de actuar sobre $|\varphi\rangle_C$ con los operadores unitarios X_C , Y_C y Z_C , que son las matrices de Pauli actuando en el espacio de Hilbert de la particula C . Observemos que $|\varphi\rangle_C$ es el mismo qubit que el estado a teleportar. Como $Z|0\rangle = |0\rangle$, $Z|1\rangle = -|1\rangle$, tenemos:

$$-\lambda|0\rangle_C + \mu|1\rangle_C = -Z_C(\lambda|0\rangle_C + \mu|1\rangle_C) = -Z_C|\varphi\rangle_C. \quad (13.8)$$

Ademas, puesto que $Y|0\rangle = i|1\rangle$, $Y|1\rangle = -i|0\rangle$, entonces:

$$-\mu|0\rangle_C + \lambda|1\rangle_C = -iY_C(\lambda|0\rangle_C + \mu|1\rangle_C) = -iY_C|\varphi\rangle_C. \quad (13.9)$$

Finalmente, usando $X|0\rangle = |1\rangle$, $X|1\rangle = -|0\rangle$, llegamos a:

$$\mu|0\rangle_C + \lambda|1\rangle_C = X_C(\lambda|0\rangle_C + \mu|1\rangle_C) = X_C|\varphi\rangle_C. \quad (13.10)$$

Entonces, podemos escribir:

$$|\chi\rangle_{ABC} = \frac{1}{2} \left[-|\psi^-\rangle_{AB}|\varphi\rangle_C - |\psi^+\rangle_{AB}Z_C|\varphi\rangle_C - |\phi^+\rangle_{AB}iY_C|\varphi\rangle_C + |\phi^-\rangle_{AB}X_C|\varphi\rangle_C \right]. \quad (13.11)$$

Cuando Alice recibe la partícula B de la fuente, efectúa medidas para proyectar sobre uno de los estados de Bell del sistema AB e informa a Bob de su resultado por medio de una comunicación clásica (por ejemplo un teléfono ordinario). Entonces Bob sabe cuál es el estado de la partícula C . Este estado se lee de la expresión anterior de $|\chi\rangle_{ABC}$ y se muestra en la siguiente tabla:

Estado Alice	Estado Bob
$ \psi^-\rangle_{AB}$	$- \varphi\rangle_C$
$ \psi^+\rangle_{AB}$	$-Z_C \varphi\rangle_C$
$ \phi^+\rangle_{AB}$	$-iY_C \varphi\rangle_C$
$ \phi^-\rangle_{AB}$	$X_C \varphi\rangle_C$

Para reconstruir el qubit de Alice, Bob tiene que aplicar una transformación unitaria, que sería la inversa de la que aparece en la tabla anterior. Observemos que:

- Los coeficientes (λ, μ) no son medidos ni por Alice ni por Bob. De hecho son desconocidos para Alice.
- El estado $|\psi\rangle_A$ es destruido, por lo que no hay contradicción con el teorema de no clonación cuántica.
- La teleportación nunca lleva consigo transporte de materia, solo de información.
- Bob solo puede preparar el estado $|\varphi\rangle_C$ cuando recibe la información de Alice, que se transmite por un canal clásico. Por tanto no puede haber transmisión instantánea (o a mayor velocidad que la de la luz) de información.

La teleportación cuántica se ha realizado experimentalmente sobre grandes distancias (el record en 2015 es de 143 Km entre dos islas canarias) con varios tipos de partículas (átomos, iones, fotones, electrones e incluso circuitos superconductores). China lanzó en Agosto de 2016 un satélite para tratar de utilizar la teleportación cuántica como un sistema global de telecomunicaciones a grandes distancias.